

八十六學年度全國高中數學科能力競賽決賽

競試一試題

1. 設 A 是半徑分別為 1 與 $\sqrt{2}$ 的兩球 S_1 與 S_2 所交圓上的一點， S_1 與 S_2 的球心分別是 O_1 與 O_2 ， \overline{AD} 是球 S_1 的直徑， $\overline{O_2D}$ 交球 S_1 於點 M ，已知 $\overline{O_1O_2} = 2$ ，求 \overline{AM} 的長度。
2. 令 p 為奇質數，設 $f(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + p$ 為 x 的整係數多項式，且 $1 \leq a_p \leq a_{p-1} \leq \cdots \leq a_2 \leq a_1 \leq p$ ，試問有幾組 $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}, a_p$ 使得 $f(x) = 0$ 有整數解。
3. 將一邊長為 n 的正三角形 ABC 用平行線等分成 n^2 個邊長都是 1 的單位小三角形， D 為其中一個固定的交點(位置如下圖所示)，首先將 A, B, C, D 四點標上數字 1，而其他的交點都標上數字 0，再依下列規則操作，重新標號：每次操作僅允許將某兩個相鄰的單位三角形所構成的菱形上的數字同時加 1 或減 1，而其他的標號數不變。
 - (a) 試確定所有可能的正整數 $n (\geq 3)$ 使得經過有限次的操作後，可將所有點的標號數都變成 0。
 - (b) 承(a)的結果，除了前面給定的 D 點之位置外，是否還有其他可設定 D 點的位置呢？若有，請計算出所有可放置 D 點的位置之個數(以 n 表示出來)。

