教育部 104 學年度高級中學數學能力競賽決賽
參考解答

【筆試二】第一題

等腰梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}//\overline{CD}$，$\overline{AB}>\overline{CD}$ 且 $\overline{AD}=\overline{BC}$。試證：若 P 為 $ABCD$ 內部或邊上一點，則 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}\le\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}$。

【解】我們將利用以下的簡單性質:

(1) 凸四邊形兩對角線長之和大於任一組對邊長之和

(2) 等腰梯形的兩對角線等長

(3) 橢圓外一點到兩焦點距離和大於橢圓上的點到兩焦點距離和(即長軸長)

情況(1) 點 P 在 $ABCD$ 內部 (如圖(1))

以 A,B 為焦點，$\overline{PA}+\overline{PB}$ 為長軸長的橢圓 Γ_1，設分別交 $\overline{AD},\overline{BC}$ 於點 K,K'。

以 C,D 為焦點，$\overline{PC}+\overline{PD}$ 為長軸長的橢圓 Γ_2，設分別交 $\overline{AD},\overline{BC}$ 於點 M,M'。

注意：過點 P 作 $\overline{AB}$ 的平行線 L，則 K,K' 在 L 的下方，M,M' 在 L 的上方。

因此，$\overline{AD}=\overline{AK}+\overline{KM}+\overline{MD}$。於是可得：

$$\begin{aligned}
\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}&=(\overline{PA}+\overline{PB})+(\overline{PC}+\overline{PD})=(\overline{KA}+\overline{KB})+(\overline{MC}+\overline{MD})\\
&<\overline{KA}+(\overline{KM}+\overline{MB})+\overline{MC}+\overline{MD}=(\overline{KA}+\overline{KM}+\overline{MD})+(\overline{MB}+\overline{MC})\\
&=\overline{AD}+(\overline{MB}+\overline{M'D})<\overline{AD}+(\overline{BD}+\overline{M'M})\\
&<\overline{AD}+(\overline{AB}+\overline{AC})=\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}
\end{aligned}$$

。

【註】情況(1)的另一證明：設平行線 L 交 $\overline{AD}$ 於點 P'，則 P' 在 K,M 之間，得知 P' 在兩橢圓 Γ_1 與 Γ_2 的外部。因此，$\overline{PA}+\overline{PB}<\overline{P'A}+\overline{P'B}$ 且 $\overline{PC}+\overline{PD}<\overline{P'C}+\overline{P'D}$；於是，$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}<\overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}+\overline{P'D}$，再由情況(2)即可得證。

情況(2) 點 P 在腰 $\overline{AD}$ 或 $\overline{BC}$ 上 (如圖(2))

依對稱性可設 $P\in\overline{AD}$。若 P 為頂點 A 或 D，命題顯然成立；故僅須考慮 P 不為頂點的情況。過點 P 作 $\overline{AB}$ 的平行線，交 $\overline{BC}$ 於點 E，則

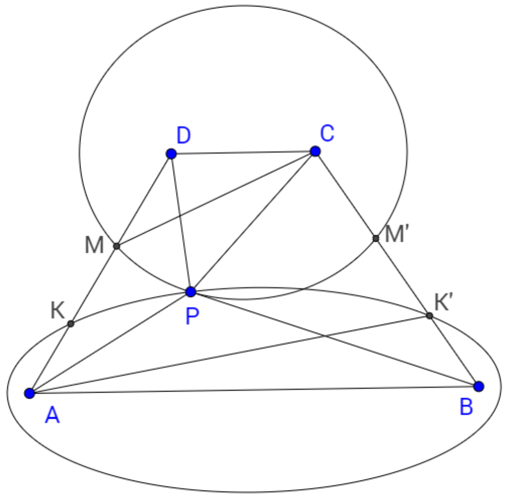
$$\overline{PB}+\overline{PC}=\overline{AE}+\overline{PC}<\overline{AC}+\overline{PE}<\overline{AC}+\overline{AB}$$

。

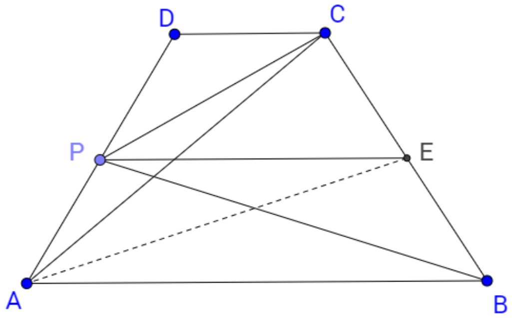
因此，$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}=\overline{AD}+(\overline{PB}+\overline{PC})<\overline{AD}+(\overline{AC}+\overline{AB})$

$$=\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}$$

。



圖(1)



圖(2)

情況(3) 點 P 在上底 $\overline{CD}$ 上 (如圖(3))

以 A,B 為焦點，$\overline{PA}+\overline{PB}$ 為長軸長作橢圓 Γ_1，此橢圓與梯形都以 $\overline{AB}$ 的中垂線為對稱軸，依對稱性可知：點 C 在 Γ_1 上或外部，故

$$\overline{PA}+\overline{PB}\le\overline{AC}+\overline{B\in}\quad\overline{A+C}\ 。$$

因此，$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}=(\overline{PA}+\overline{PB})+\overline{CD}\le(\overline{AC}+\overline{AD})+\overline{CD}$

$<(\overline{AC}+\overline{AD})+\overline{AB}=\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}$ 。

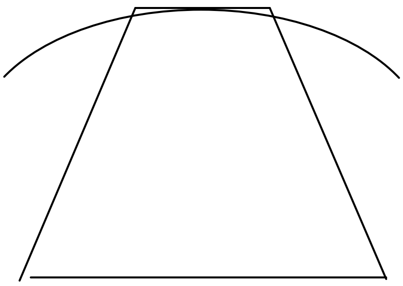
情況(4) 點 P 在下底 $\overline{AB}$ 上 (如圖(4))

以 C,D 為焦點，$\overline{PC}+\overline{PD}$ 為長軸長作橢圓 Γ_2，此橢圓與梯形都以 $\overline{CD}$ 的中垂線為對稱軸，依對稱性可知：點 A 在 Γ_2 上或外部，故

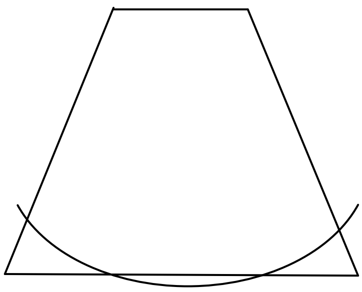
$$\overline{PC}+\overline{PD}\le\overline{AC}+\overline{\quad}\ 。$$

因此，$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}=\overline{AB}+(\overline{PC}+\overline{PD})\le\overline{AB}+(\overline{AC}+\overline{AD})$

$=\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{A\ }$ 。



圖(3)



圖(4)

【筆試二】第二題

設 n 為給定的正整數且 $n \geq 2$。若 $A = \left\{1, 2, 3, \cdots, 2^n\right\}$ 的子集合 B 滿足以下的性質：

『若 $a, b \in A$，$a \neq b$，且 $a+b$ 為 2 的冪次，則 a, b 之中恰有一數在集合 B 中』，

則稱 B 為 A 的一個「好子集」。試問集合 $A = \left\{1, 2, 3, \cdots, 2^n\right\}$ 中有多少個好子集？

【解】以下用數學歸納法證明：可能的 B 有 2^{n+1} 個。

(1) $n = 2$ 時，$A = \{1, 2, 3, 4\}$。由 $1+3=4$ 得知：子集合 B 必包含 1 或 3 中的一個數，且不能同時包含此二數。故好集合有以下 $8 = 2^{2+1}$ 個：

$\{1\}$、$\{3\}$、$\{1,2\}$、$\{1,4\}$、$\{1,2,4\}$、$\{3,2\}$、$\{3,4\}$、$\{3,2,4\}$。

(2) 設 $n = k$ 時的好集合有 2^{k+1} 個。以下證明：

每一個 $n = k$ 的好集合 B_k 都恰對應到兩個 $n = k+1$ 時的好集合 B_{k+1}，

且每個 B_{k+1} 也對應到某個 B_k。

任取一個 $n = k$ 的好集合 B_k。對任意 $a \in \{1, 2, 3, \cdots, 2^k\}$：

（i） 若 $a \leq 2^k - 1$ 且 $a \in B_k$，則取 $a \in B_{k+1}$（即 $2^{k+1} - a \notin B_{k+1}$）。

(ii) 若 $a \leq 2^k - 1$ 且 $a \notin B_k$，則取 $2^{k+1} - a \in B_{k+1}$（即 $a \notin B_{k+1}$）。

(iii) 若 $a = 2^k$ 且 $a \in B_k$，則取 $a \in B_{k+1}$。

(iv) 若 $a = 2^k$ 且 $a \notin B_k$，則令 $a \notin B_{k+1}$。

(v) 可自由選擇 2^{k+1} 是否在 B_{k+1} 中。

$$\begin{array}{lcl}
B_2 & & B_3 \\
\{1\} & \rightarrow & \{1,5,6\} \\
 & \searrow & \{1,5,6,8\} \\
\{1,2\} & \rightarrow & \{1,2,5\} \\
 & \searrow & \{1,2,5,8\} \\
\{1,4\} & \rightarrow & \{1,4,5,6\} \\
 & \searrow & \{1,4,5,6,8\} \\
\{1,2,4\} & \rightarrow & \{1,2,4,5\} \\
 & \searrow & \{1,2,4,5,8\}
\end{array}$$

因此，每一個 $n = k$ 的好集合 B_k 都恰對應到兩個 $n = k+1$ 時的好集合 B_{k+1}，且每個 B_{k+1} 也對應到某個 B_k，故 $n = k+1$ 時的好集合 B_{k+1} 恰有 $2 \cdot 2^{k+1} = 2^{k+2}$ 個，得證。

【筆試二】第三題

設有 m 個相異的正偶數與 n 個相異的正奇數之總和小於 2015。對於所有此種正整數 m 與 n，試求 $3m+4n$ 的最大值。

【解】

因為任意 m 個相異正偶數與任意 n 個相異正奇數的和之中，值最小的是

$$(2+4+6+...+2m)+(1+3+5+...+(2n-1))=m(m+1)+n^2$$

所以，若 $m(m+1)+n^2\le 2015$，則得

$$(m+\frac{1}{2})^2+n^2\le 2015\frac{1}{4}\text{ 。}$$

另一方面，根據柯西不等式，可得

$$3m+4n=3(m+\frac{1}{2})+4n-\frac{3}{2}\le\sqrt{(3^2+4^2)\left((m+\frac{1}{2})^2+n^2\right)}-\frac{3}{2}=5\sqrt{(m+\frac{1}{2})^2+n^2}-\frac{3}{2}$$

$$\le 5\sqrt{2015\frac{1}{4}}-\frac{3}{2}<5\times 45-\frac{3}{2}=225-\frac{3}{2}=223\frac{1}{2}\text{ 。}$$

(1) $3m+4n=223$ 的正整數解為 $(m,n)=(1+4k,55-3k)$，$0\le k\le 18$。這組解所對應的 $m(m+1)+n^2$ 之值為

$$m(m+1)+n^2=(1+4k)(2+4k)+(55-3k)^2$$

$$=25k^2-318k+3027=25(k-\frac{159}{25})^2+3027-\frac{25281}{25}\ge 3027-\frac{25281}{25}>2015\text{ 。}$$

也就是說，$3m+4n=223$ 的正整數解都不滿足 $m(m+1)+n^2\le 2015$，亦即：滿足 $m(m+1)+n^2\le 2015$ 的正整數 m 與 n 都不滿足 $3m+4n=223$。

(2) $3m+4n=222$ 的正整數解為 $(m,n)=(2+4k,54-3k)$，$0\le k\le 17$。這組解所對應的 $m(m+1)+n^2$ 之值為 $m(m+1)+n^2=(2+4k)(3+4k)+(54-3k)^2$

$$=25k^2-304k+2922=25(k-\frac{152}{25})^2+2922-\frac{23104}{25}\ge 25(k-\frac{152}{25})^2+\frac{429}{25}\text{ 。}$$

當 $k=6$ (6 是與 $\frac{152}{25}$ 最接近的整數) 時，對應的解為 $m=26$，$n=36$，而

$$m(m+1)+n^2=26\times 27+36^2=1998<2015\text{ 。}$$

這表示確實有 26 個相異的正偶數與 36 個相異的正奇數之總和小於 2015，例如：從 2 至 52 等 26 個正偶數及由 1 至 71 等 36 個正奇數。因此，$3m+4n$ 的最大值為 222。