教育部104學年度高級中學數學能力競賽決賽
參考解答

【獨立研究二】第一題

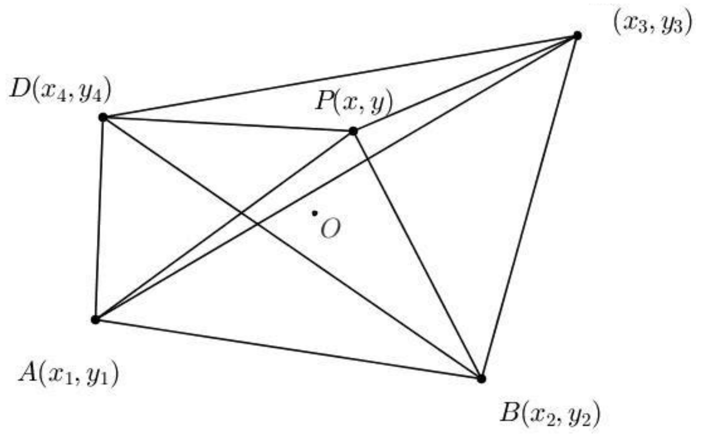
設 $ABCD$ 為凸四邊形，其頂點 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$ 的算術平均點 O 之坐標 $O(\bar{x},\bar{y})$ 定義成 $\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$，$\bar{y}=\dfrac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}$。對 $ABCD$ 內或邊上的任意點 P，定義 $f(P)=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$。試求 $f(P)$ 的最小值與最大值(以 $ABCD$ 的邊長及對角線長或 O 到頂點的距離來表示)。

【解】

答：最小值為 $\dfrac{1}{4}\left[(\overline{AB})^2+(\overline{BC})^2+(\overline{CD})^2+(\overline{DA})^2+(\overline{AC})^2+(\overline{BD})^2\right]$，

最大值 = 最小值$+4\overline{PO}^2$，其中 $\overline{PO}^2=\max\left\{\overline{AO}^2,\overline{BO}^2,\overline{CO}^2,\overline{DO}^2\right\}$。

示意圖如下：



圖(1)

令二元二次函數 $f(x,y)=(\overline{PA})^2+(\overline{PB})^2+(\overline{PC})^2+(\overline{PD})^2=\sum_{i=1}^{4}(x-x_i)^2+\sum_{i=1}^{4}(y-y_i)^2$ 代表 P 點到四頂點的距離平方和，則

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\sum_{i=1}^{4}(x^2-2x_ix+x_i^2)+\sum_{i=1}^{4}(y^2-2y_iy+y_i^2)\\&=4x^2-2\left(\sum_{i=1}^{4}x_i\right)x+\sum_{i=1}^{4}x_i^2+4y^2-2\left(\sum_{i=1}^{4}y_i\right)y+\sum_{i=1}^{4}y_i^2\end{aligned}$$ 。

經由配方法得到

$$f(x,y)=4\left[x^2-2\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i}{4}\right)x+\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i}{4}\right)^2\right]+\sum_{i=1}^{4}x_i^2-4\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i}{4}\right)^2$$

$$+4\left[y^2-2\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}y_i}{4}\right)y+\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}y_i}{4}\right)^2\right]+\sum_{i=1}^{4}y_i^{\,2}-4\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}y_i}{4}\right)^2 \text{。}$$

令 $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i}{4}$，$\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{4}y_i}{4}$，則

$$\begin{aligned}
f(x,\ y)&=4\left[x^2-2\left(\bar{x}\right)x+\left(\bar{x}\right)^2\right]+\sum_{i=1}^{4}x_i^{\,2}-4\left(\bar{x}\right)^2+4\left[y^2-2\left(\bar{y}\right)y+\left(\bar{y}\right)^2\right]+\sum_{i=1}^{4}y_i^{\,2}-4\left(\bar{y}\right)^2\\
&=4\left(x-\bar{x}\right)^2+\sum_{i=1}^{4}x_i^{\,2}-4\left(\bar{x}\right)^2+4\left(y-\bar{y}\right)^2+\sum_{i=1}^{4}y_i^{\,2}-4\left(\bar{y}\right)^2\\
&=4\left[\left(x-\bar{x}\right)^2+\left(y-\bar{y}\right)^2\right]+\sum_{i=1}^{4}x_i^{\,2}-4\left(\bar{x}\right)^2+\sum_{i=1}^{4}y_i^{\,2}-4\left(\bar{y}\right)^2 \text{。}
\end{aligned}$$

其中，$\sum_{i=1}^{4}x_i^{\,2}-4\left(\bar{x}\right)^2$

$$\begin{aligned}
&=x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}+x_4^{\,2}-\frac{1}{4}(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}+x_4^{\,2}+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4)\\
&=\frac{1}{4}(3x_1^{\,2}+3x_2^{\,2}+3x_3^{\,2}+3x_4^{\,2}-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3-2x_2x_4-2x_3x_4)\\
&=\frac{1}{4}\left[(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_1-x_4)^2+(x_2-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_3-x_4)^2\right]\\
&=\frac{1}{4}\left[\sum_{1\le i<j\le 4}(x_i-x_j)^2\right] \text{。}
\end{aligned}$$

同理，$\sum_{i=1}^{4}y_i^{\,2}-4\left(\bar{y}\right)^2=\frac{1}{4}\left[\sum_{1\le i<j\le 4}(y_i-y_j)^2\right]$。

故

$$f(x,y)=4\left[\left(x-\bar{x}\right)^2+\left(y-\bar{y}\right)^2\right]+\frac{1}{4}\left[\sum_{1\le i<j\le 4}(x_i-x_j)^2\right]+\frac{1}{4}\left[\sum_{1\le i<j\le 4}(y_i-y_j)^2\right];$$

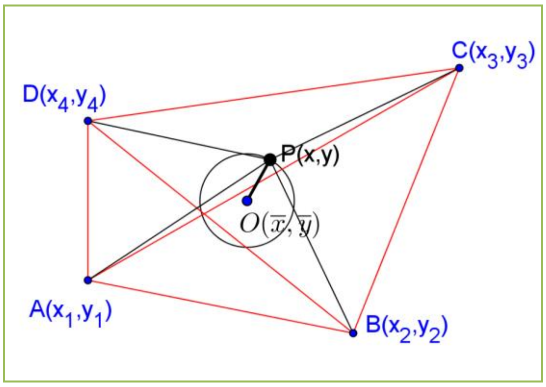
即

$$f(x,y)=4\left[\left(x-\bar{x}\right)^2+\left(y-\bar{y}\right)^2\right]+\frac{1}{4}\left[\sum_{1\le i<j\le 4}\left[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2\right]\right] \text{。}$$

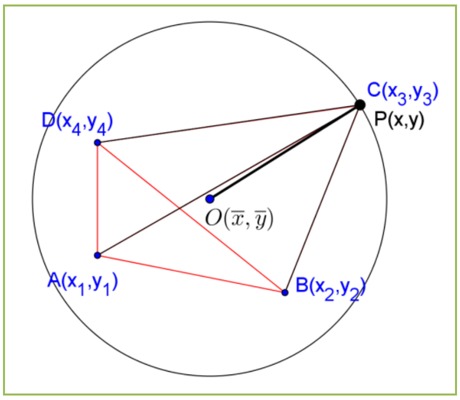
由幾何意義來看，如圖(2)，

$$f(x,y)=4(\overline{PO})^2+\frac{1}{4}\left[(\overline{AB})^2+(\overline{BC})^2+(\overline{CD})^2+(\overline{DA})^2+(\overline{AC})^2+(\overline{BD})^2\right] \text{。}$$

若以坐標平均點 O 為圓心，$\overline{OP}$ 為半徑作圓，圓周上任意點的 $f(x,y)$ 皆與點 P 的 $f(x,y)$ 相同。由於 $\frac{1}{4}\left[(\overline{AB})^2+(\overline{BC})^2+(\overline{CD})^2+(\overline{DA})^2+(\overline{AC})^2+(\overline{BD})^2\right]$ 是定數，$\overline{PO}^2$ 愈大，$f(x,y)$ 就愈大，故 $f(x,y)$ 的最小值發生在 $P=O$ 點，此時 O 不一定是四邊形的重心(若為正多邊形 O 一定是重心)，而最大值發生在 P 為離 O 最遠的頂點 C 時，如圖(3)所示。



圖(2)



圖(3)

綜合結論：

最小值發生在 P 是算術平均點 O，其值為

$$\frac{1}{4}\left[(\overline{AB})^2+(\overline{BC})^2+(\overline{CD})^2+(\overline{DA})^2+(\overline{AC})^2+(\overline{BD})^2\right]。$$

最大值發生在 P 為離最遠的頂點時，如示意圖即為頂點 C，其值為

$$4(\overline{CO})^2+\frac{1}{4}\left[(\overline{AB})^2+(\overline{BC})^2+(\overline{CD})^2+(\overline{DA})^2+(\overline{AC})^2+(\overline{BD})^2\right]，$$

即

$$4\max\left\{\overline{AO}^2,\overline{BO}^2,\overline{CO}^2,\overline{DO}^2\right\}+\frac{1}{4}\left[(\overline{AB})^2+(\overline{BC})^2+(\overline{CD})^2+(\overline{DA})^2+(\overline{AC})^2+(\overline{BD})^2\right]。$$

【獨立研究二】第二題

試問是否存在無限多個正整數 n 同時滿足下列兩個條件：

(1) 若 p 是 n 的質因數，則 p^2 是 n 的因數；

(2) 若 q 是 $n+1$ 的質因數，則 q^2 是 $n+1$ 的因數。

【解】

稱滿足題設兩個條件的 n 為一個「好數」。

顯然，8 是一個好數(因為 $8=2^3$，而 $8+1=3^2$)。

以下證明：若 n 為一個好數，則 $m=4n(n+1)$ 也是一個好數。

(1) 當 p 是 m 的質因數時，$p=2$ 或 p 是 n 的質因數或 p 是 $n+1$ 的質因數。

若 $p=2$，則 $p^2=4$ 為 m 的因數。若 p 是 n 的質因數或 p 是 $n+1$ 的質因數，則因為 n 為一個好數，故 p^2 是 n 的因數或 p^2 為 $n+1$ 的因數；得知：p^2 為 m 的因數。

(2) 因為 $m+1=4n(n+1)+1=(2n+1)^2$ 是一完全平方數，故當 q 是 $m+1$ 的質因數時，q^2 也會是 $m+1$ 的因數。

因此，有無限多個好數。

例如：

$$8=2^3,\ 9=3^2$$
$$288=4\cdot 8\cdot 9=2^5\cdot 3^2,\ 289=17^2$$
$$332928=4\cdot 288\cdot 289=2^7\cdot 3^2\cdot 17^2,\ 332929=577^2$$ 。

$\cdots$

$\cdots$

【獨立研究二】第三題

設 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$ 都是正整數，且滿足 $a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}=3n$，其中 $n\ge 1$。

試證：存在 $\{1,2,3,\cdots,n+1\}$ 的子集合 S 使得 $\sum\limits_{i\in S}a_i=n$。

【解】

令 $S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i$，$k=1,2,\cdots,n+1$。若存在某 $S_k=n$，顯然滿足所求；

若存在某 $S_k=2n$，則 $\sum\limits_{i=k+1}^{n+1}a_i=\sum\limits_{i=1}^{n+1}a_i-\sum\limits_{i=1}^{k}a_i=3n-2n=n$，亦顯然滿足所求。

現在假設 $S_k\ne n,2n$，$k=1,2,\cdots,n+1$，同時假設 $S_\ell<n<S_{\ell+1}$，$S_m<2n<S_{m+1}$。

今考慮以下三個集合：

$A=\{S_1,S_2,\cdots,S_\ell\}$，

$B=\{S_{\ell+1}-n,S_{\ell+2}-n,\cdots,S_m-n\}$，

$C=\{S_{m+1}-2n,S_{m+2}-2n,\cdots,S_{n+1}-$ 。

顯然，$|A|+|B|+|C|=n+1$，而且各集合的元素皆在 1 和 n 之間，由鴿籠原理知道以下三種情形至少有一種會發生：

(1) $A\cap B\ne\phi$，也就是存在 $1\le i\le\ell$ 和 $\ell+1\le j\le m$ 使得 $S_i=S_j-m$，

因而 $n=S_j-S_i=\sum\limits_{s=i+1}^{j}a_s$，滿足所求。

(2) $B\cap C\ne\phi$，也就是存在 $\ell+1\le i\le m$ 和 $m+1\le j\le n+1$ 使得 $S_i-n=S_j-2n$，

因而 $n=S_j-S_i=\sum\limits_{s=i+1}^{j}a_s$，滿足所求。

(3) $A\cap C\ne\phi$，也就是存在 $1\le i\le\ell$ 和 $m+1\le j\le n+1$ 使得 $S_i=S_j-2n$，

因而 $\sum\limits_{s=1}^{i}a_s+\sum\limits_{s=j+1}^{n+1}a_s=S_{n+1}-(S_j-S_i)=3n-2n=n$，滿足所求。

由(1)、(2)和(3)得證！