教育部104學年度高級中學數學能力競賽決賽

【獨立研究二】第一題

設 $ABCD$ 為凸四邊形，其頂點 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$ 的算術平均點 O 之坐標 $O(\overline{x},\overline{y})$ 定義成 $\overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$， $\overline{y}=\dfrac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}$ 。對 $ABCD$ 內或邊上的任意點 P ，定義 $f(P)=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$ 。試求 $f(P)$ 的最小值與最大值(以 $ABCD$ 的邊長及對角線長或 O 到頂點的距離來表示)。

【獨立研究二】第二題

試問是否存在無限多個正整數 n 同時滿足下列兩個條件：

(1) 若 p 是 n 的質因數，則 p^2 是 n 的因數；

(2) 若 q 是 $n+1$ 的質因數，則 q^2 是 $n+1$ 的因數。

【獨立研究二】第三題

設 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$ 都是正整數，且滿足 $a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}=3n$ ，其中 $n\ge 1$ 。
試證：存在 $\{1,2,3,\cdots,n+1\}$ 的子集合 S 使得 $\sum_{i\in S}a_i=n$ 。