教育部 104 學年度高級中學數學能力競賽決賽
參考解答

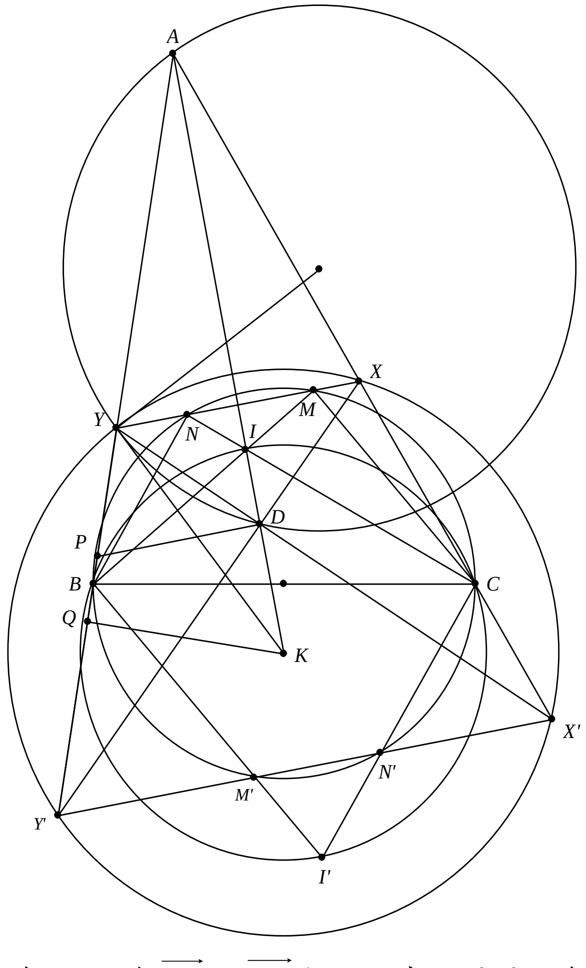
【獨立研究一】第一題

給定一個三角形 ABC，並以邊 $\overline{BC}$ 為直徑作一圓。設此圓與 $\angle B$、$\angle C$ 的平分線分別交於點 M、N，又與 $\angle B$、$\angle C$ 的外角平分線分別交於點 M'、N'。設直線 MN 與直線 AC、AB 分別交於點 X、Y，又設直線 $M'N'$ 與直線 AC、AB 分別交於點 X'、Y'。令 D 表示直線 XY' 與直線 $X'Y$ 的交點。

(1) 試證：X、Y、X'、Y' 四點共圓。

(2) 設圓 $XYX'Y'$ 的圓心為點 K。試證：直線 KY 與 ΔADY 的外接圓切於點 Y。

【解】



設 ΔABC 的內切圓圓心為 I、而與 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{AC}$ 相切的旁切圓圓心為 I'。

(1) 因為點 B、C、M、N 共圓，所以，$\angle XMI$ 與 $\angle BCI$ 相等或互補。因為 $\overrightarrow{CI}$ 是 $\angle BCX$

的分角線，所以，$\angle BCI=\angle ICX$，進一步知點 I、C、X、M 共圓。於是，$\angle IXC=\angle IMC=\angle BMC=90^{\circ}$，由此知點 X 是ΔABC 的內切圓與$\overline{AC}$ 的切點。同理，點 Y 是ΔABC 的內切圓與$\overline{AB}$ 的切點。仿此可證：點 X'、Y' 分別是ΔABC 的的旁切圓 I' 與射線 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 相切的切點。於是，可知：$\overline{AX}=\overline{AY}$ 及 $\overline{AX'}=\overline{AY'}$。進一步知：$\overline{XY}$ 與 $\overline{X'Y'}$ 都與 $\overline{AI}$ 垂直，$\overline{XY}$ 與 $\overline{X'Y'}$ 平行，$XYY'X'$ 是等腰梯形。因此，X、Y、X'、Y' 四點共圓。

(2) 要證明直線 KY 與ΔADY 的外接圓切於點 Y，只須證明 $\overline{KA}\times\overline{KD}=\overline{KY}^2$。

因為點 K 是圓 $XYY'X'$ 的圓心，所以，兩弦 $\overline{XX'}$ 與 $\overline{YY'}$ 的垂直平分線相交於點 K。因為 $\overline{AX}=\overline{AY}$ 且 $\overline{AX'}=\overline{AY'}$，所以，$\angle A$ 的分角線垂直平分 $\overline{XY}$ 及 $\overline{X'Y'}$。由此可知：圓 $XYY'X'$ 的圓心 K 在 $\angle A$ 的分角線上。於是，點 I、點 I' 點與點 K 共線。

因為 $\overline{IX}$、$\overline{I'X'}$ 都與 $\overline{XX'}$ 的垂直平分線平行，所以，$\overline{XX'}$ 的垂直平分線必通過 $\overline{II'}$ 的中點，亦即：點 K 是 $\overline{II'}$ 的中點。

設ΔABC 的三邊長如下：$\overline{BC}=a$、$\overline{CA}=b$、$\overline{AB}=c$，並令 $s=(a+b+c)/2$ 及 $\alpha=(1/2)\angle BAC$。因為ΔABC 的內切圓 I 與邊 $\overline{AC}$ 相切於點 X，旁切圓 I' 與射線 $\overrightarrow{AC}$ 相切於點 X'，所以，可知

$$\overline{AX}=\overline{AY}=\frac{1}{2}(-a+b+c)=s-a\text{，}$$

$$\overline{CX}=\overline{BY'}=\frac{1}{2}(a+b-c)=s-c\text{，}$$

$$\overline{CX'}=\overline{BY}=\frac{1}{2}(a-b+c)=s-b\text{。}$$

由此可得

$$\overline{XX'}=\overline{CX}+\overline{CX'}=\frac{1}{2}(a+b-c)+\frac{1}{2}(a-b+c)=a\text{，}$$

$$\overline{AX'}=\overline{AX}+\overline{XX'}=\frac{1}{2}(b+c-a)+a=\frac{1}{2}(a+b+c)=s\text{。}$$

因為點 K 是 $\overline{II'}$ 的中點，所以，可得

$$\overline{AK}=\frac{1}{2}(\overline{AI}+\overline{AI'})=\frac{1}{2}(\overline{AX}+\overline{AX'})\sec\alpha=\frac{2s-a}{2}\sec\alpha\text{。}$$

因為 $\overline{XY}$ 與 $\overline{X'Y'}$ 平行，所以，可知ΔAXY 與$\Delta AX'Y'$ 相似。由此可得

$$\frac{\overline{XY}}{\overline{X'Y'}}=\frac{\overline{AX}}{\overline{AX'}}=\frac{s-a}{s} \text{。}$$

過點 D 作一直線與 $\overline{XY}$ 平行，設此平行線與 $\overline{AY'}$ 交於點 P，則可得

$$\frac{\overline{YP}}{\overline{Y'P}}=\frac{\overline{YD}}{\overline{X'D}}=\frac{\overline{XY}}{\overline{X'Y'}}=\frac{s-a}{s} \text{。}$$

因為 $\overline{YY'}=\overline{BC}=a$，所以，可得

$$\overline{YP}=\frac{s-a}{2s-a}\times\overline{YY'}=\frac{a(s-a)}{2s-a} \text{，}$$

$$\overline{AP}=\overline{AY}+\overline{YP}=(s-a)+\frac{a(s-a)}{2s-a}=\frac{2s(s-a)}{2s-a} \text{，}$$

$$\overline{AD}=\overline{AP}\cos\alpha=\frac{2s(s-a)}{2s-a}\cos\alpha \text{。}$$

設點 Q 是 $\overline{YY'}$ 的中點，則得

$$\overline{YQ}=\frac{\overline{YY'}}{2}=\frac{a}{2} \text{，}$$

$$\overline{AQ}=\frac{1}{2}(\overline{AY}+\overline{AY'})=\frac{1}{2}((s-a)+s)=s-\frac{a}{2} \text{，}$$

$$\begin{aligned}
\overline{KA}\times\overline{KD}&=\overline{AK}\times(\overline{AK}-\overline{AD})=\overline{AK}^2-\overline{AK}\times\overline{AD}\\
&=(s-\frac{a}{2})^2\sec^2\alpha-s(s-a)\\
&=(s-\frac{a}{2})^2\tan^2\alpha+\frac{a^2}{4}\\
&=\overline{AQ}^2\tan^2\alpha+\overline{YQ}^2\\
&=\overline{KQ}^2+\overline{YQ}^2\\
&=\overline{KY}^2 \text{。}
\end{aligned}$$

【獨立研究一】第二題

試求所有可能的正整數 a,b,c ，使得 $(b-\frac{1}{a})(c-\frac{1}{b})(a-\frac{1}{c})$ 為整數。

【解】所有的解為 $(1,1,c)$ 或 $(2,3,5)$ 的所有排列。

不妨設 $a \le b \le c$ ，展開原式後有 $abc \mid (ab-1)(bc-1)(ca-1)$ ，

亦即 $abc \mid (ab+bc+ca-1)$ ，故

$$abc \le ab+ac+bc-1 < ab+bc+ca \le bc+bc+bc = 3bc \text{。}$$

因此，$a<3$。底下就 a 之值討論：

(1) 若 $a=1$，則 $bc \mid (b+c-1)$ 。因此，$bc \le b+c-1$，故

$$0 \ge bc-b-c+1=(b-1)(c-1) \text{，}$$

故 $b=1$ 或 $c=1$，此時，$a=b=1$。得到可能的解為 $(a,b,c)=(1,1,c)$ 。

(2) 若 $a=2$ ，則 $2bc \mid (bc+2b+2c-1)$ ，故

$$bc \le 2b+2c-1 < 2b+2c \le \text{，}$$

故 $b<4$。

(i)若 $b=2$ ，有 $4c \mid (4c+3)$ ，不可能。

(ii)若 $b=3$ ，有 $6c \mid (5c+5)$ ，故 $c \le 5$；逐個驗證得到僅有 $c=5$ 。

因此，所有的解為 $(1,1,c)$ 或 $(2,3,5)$ ，及其所有的重排。

【獨立研究一】第三題

設 n 為給定的正整數。試找出最大的正整數 m ，使得集合 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 中有 m 個子集 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 滿足：任兩集合 A_i,A_j 的交集都恰含一個或幾個連續的整數。

【解】設集合 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 中有 $f(n)$ 個子集 $A_1,A_2,\cdots,A_{f(n)}$ 滿足：任兩集合 A_i,A_j 的交集都恰含一個或幾個連續的整數。以下證明：

$$\max f(n)=\begin{cases}\dfrac{(n+1)^2}{4}, & \text{當 } n \text{ 為奇數}\\[2mm] \dfrac{n(n+2)}{4}, & \text{當 } n \text{ 為偶數}\end{cases}。$$

令 $\max f(n)=m$ ，則集合 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 中有 m 個非空的子集合 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 滿足：任兩集合 A_i,A_j 的交集都恰含一個或幾個連續的整數。設 $\max A_i=a_i,\min A_i=b_i$ ，並令集合 B_i 表示由 a_i 至 b_i 的連續整數所組成，則 $A_i\subset B_i$ 且集合 $B_1,B_2,\cdots,B_m$ 也滿足：任兩集合 B_i,B_j 的交集都恰含一個或幾個連續的整數。由此可得：

$$\max_i a_i \le \min_i b_i \quad (\text{即得} \bigcap_{i=1}^{m} B_i \neq \varnothing)。$$

可令 $b\in\bigcap_{i=1}^{m} B_i$ 。對 $k=1,2,3,\cdots,n$ ，設集合 $B_1,B_2,\cdots,B_m$ 中恰含 k 個連續整數有 $f_k(b)$ 個，則 $m=\sum_{k=1}^{n} f_k(b)$ 。又 $f_k(b)\le k,\ f_k(b)\le n+1-k$ ，得知 $f_k(b)\le \min\{k,n+1-k\}$ 。

(1) 當 $n=2p$ 時， $m=\sum_{k=1}^{n} f_k(b)\le 1+2+\cdots+(p-1)+p+p+(p-1)+\cdots+2+1$

$$=p^2+p=\frac{n^2+2n}{4}\ 。$$

等號於 $b=p$ 或 $b=p+1$ 時成立，故 $\max f(n)=m=\dfrac{n^2+2n}{4}$ 。

(2) 當 $n=2p+1$ 時， $m=\sum_{k=1}^{n} f_k(b)\le \sum_{k=1}^{n} f_k(p+1)$

$$=1+2+\cdots+p+(p+1)+p+\cdots+2+1$$

$$=(p+1)^2=\frac{(n+1)^2}{4}\ 。$$

等號於 $b=p+1$ 時成立，故 $\max f(n)=m=\dfrac{(n+1)^2}{4}$ 。