

教育部 104 學年度高級中學數學能力競賽決賽

【獨立研究一】第一題

給定一個三角形 ABC ，並以邊 \overline{BC} 為直徑作一圓。設此圓與 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的平分線分別交於點 M 、 N ，又與 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的外角平分線分別交於點 M' 、 N' 。設直線 MN 與直線 AC 、 AB 分別交於點 X 、 Y ，又設直線 $M'N'$ 與直線 AC 、 AB 分別交於點 X' 、 Y' 。令 D 表示直線 XY' 與直線 XY 的交點。

- (1) 試證： X 、 Y 、 X' 、 Y' 四點共圓。
- (2) 設圓 $XYX'Y'$ 的圓心為點 K 。試證：直線 KY 與 $\triangle ADY$ 的外接圓切於點 Y 。

【獨立研究一】第二題

試求所有的正整數 a, b, c ，使得 $(b - \frac{1}{a})(c - \frac{1}{b})(a - \frac{1}{c})$ 為整數。

【獨立研究一】第三題

設 n 為給定的正整數。試找出最大的正整數 m ，使得集合 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 中有 m 個子集 A_1, A_2, \dots, A_m 滿足：任兩集合 A_i, A_j 的交集都恰含一個或幾個連續的整數。