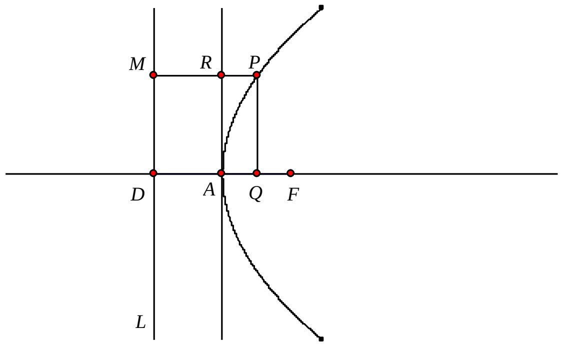
教育部 104 學年度高級中學數學能力競賽決賽
參考解答

【口試 A】第一題

(1)設 Γ 為一拋物線，其焦點為 F、頂點為 A。若點 P 是拋物線 Γ 上任意點，設點 Q 是 P 至拋物線之軸(即直線 AF)的垂足，點 R 是 P 至過頂點 A 而與軸垂直之直線的垂足，試證：$\overline{PQ}^2 = 4\overline{AF}\cdot\overline{PR}$。



(2)已知一拋物線的焦點坐標為 $F(\frac{10}{13},\frac{2}{13})$，準線方程式為 $3x-2y-4=0$，試依(1)的結果寫出此拋物線的方程式。

【解】

(1) 設拋物線 Γ 的準線為 L，焦點 F 至準線的垂足為點 D，點 P 至準線的垂足為點 M。因為點 P 在拋物線 Γ 上，所以依定義，可知 $\overline{PF}=\overline{PM}$。因為

$$\overline{PF}^2 = \overline{PQ}^2+\overline{QF}^2 = \overline{PQ}^2 + \left|\,\overline{AF}-\overline{AQ}\,\right|^2 = \overline{PQ}^2+\left|\,\overline{AF}-\overline{PR}\,\right|^2,$$

$$\overline{PM} = \overline{PR}+\overline{RM} = \overline{PR}+\overline{AD} = \overline{PR}+\overline{AF},$$

所以，由 $\overline{PF}=\overline{PM}$ 可得 $\overline{PQ}^2+\left|\,\overline{AF}-\overline{PR}\,\right|^2 = (\overline{PR}+\overline{AF})^2$，即 $\overline{PQ}^2 = 4\overline{AF}\cdot\overline{PR}$。

(2) 設 $P(x,y)$ 是拋物線上一點。因為拋物線的軸方程式為 $2x+3y-2=0$，可知：

$$\overline{PQ} = \frac{|\,2x+3y-2\,|}{\sqrt{13}}\text{。}$$

因為準線方程式為 $3x-2y-4=0$，可得：$D(\frac{16}{13},\frac{-2}{13})$。又焦點 $F(\frac{10}{13},\frac{2}{13})$，可知：

$A(1,($，且 $\overline{AF}=\frac{1}{\sqrt{13}}$。又過頂點且與準線平行的直線 AR 方程式為 $3x-2y-3=0$。

於是，可知 $\overline{PR}=\frac{|3x-2y-3|}{\sqrt{13}}$。

因此，依(1)中的結果，可知所求拋物線的程式為

$$\frac{(2x+3y-2)^2}{13} = 4\times\frac{1}{\sqrt{13}}\times\frac{-(3x-2y-3)}{\sqrt{13}}\text{，}\quad\text{或 } (2x+3y-2)^2 = -4(3x-2y-3)\text{。}$$

請注意：上式中$|3x-2y-3|$等於$-(3x-2y-3)$，是因為點$P(x,y)$與焦點F位於直線$3x-2y-3=0$的同側，而焦點坐標代入$3x-2y-3$所得值是負數的緣故。

【口試 A】第二題

設集合$A=\{1,2,3,\cdots,2015\}$，對A的子集X，將X中所有元素之和稱為「X的容量」。若X的容量為奇數，則稱X為A的「奇子集」；若X的容量為偶數，則稱X為A的「偶子集」。試求A的所有奇子集的容量之總和。

【解】

設集合$A(n)=\{1,2,\cdots,n\}$，並令

O為集合$A(n)$中所有包含元素1的奇子集所組成的集合，
E為集合$A(n)$中所有包含元素1的偶子集所組成的集合，
O'為集合$A(n)$中所有不包含元素1的奇子集所組成的集合，
E'為集合$A(n)$中所有不包含元素1的偶子集所組成的集合。

顯然，下面的映射都是一一對應(bijection)：

(a)集合O中奇子集去掉元素1就得到集合E'中的偶子集；
(b)集合E中偶子集去掉元素1就得到集合O'中的奇子集。

所以，$|O|=|E'|$，$|O'|=|E|$，且$|O\cup O'|=|E\cup E'|$。

同理，設集合$B(n)=\{2,3,\cdots,n\}$，並令

OO為集合$B(n)$中所有包含元素3的奇子集所組成的集合，
EE為集合$B(n)$中所有包含元素3的偶子集所組成的集合，
OO'為集合$B(n)$中所有不包含元素3的奇子集所組成的集合，
EE'為集合$B(n)$中所有不包含元素3的偶子集所組成的集合。

如前面說明可知：$O'=OO\cup OO'$，$E'=EE\cup EE'$，且$|OO\cup OO'|=|EE\cup EE'|$；

故$|O'|=|E'|$。所以，$|O|=|E'|=|O'|=|E|=\dfrac{1}{4}\cdot 2^n=2^{n-2}$。

因此，O的總容量$-O'$的總容量$=E$的總容量$-E'$的總容量$=2^{n-2}$。於是，可得：

集合$A(n)$的所有奇子集的容量總和$=$集合$A(n)$的所有偶子集的容量總和。

又每個元素都出現集合$A(n)$的子集2^{n-1}次。因此，集合$A(n)$的子集容量總和為$(1+2+\cdots+n)\cdot 2^{n-1}=n(n+1)\cdot 2^{n-2}$。 故所有奇子集的容量總和為$n(n+1)\cdot 2^{n-3}$。

因此，所求A的所有奇子集的容量總和為$2015\cdot 2016\cdot 2^{2012}$。