103 學年度普通型高級中等學校數學及自然學科能力競賽
數學科能力競賽決賽筆試試題參考解答

【筆試二】第一題

設 m,n 為正整數，且 $m<n$。若在 0 與 n 之間插入任意 m 個整數

$$0<a_1<a_2<\cdots<a_m<n,$$

必滿足：數列 $0,a_1,a_2,\cdots,a_m,n$ 中都會有三數形成等差數列，則稱 m 為 n 的「等差數」；例如：$3,4,5,6$ 都是 7 的等差數。設 $S(n)$ 表示 n 的最小等差數，且已知 $S(2)=1$、$S(7)=3$、$S(11)=5$、$S(12)=6$。試求 $S(13)$ 與 $S(14)$ 之值。

【解】注意：$n+1$ 的每一個小於 n 的等差數都是 n 的等差數，故 $S(n)\le S(n+1)$。因此，

$$6=S(12)\le S(13)\le S(14)。$$

(1) **證明：** $S(13)=7$

在 0 與 13 之間可以插入 6 個整數，使這 8 個數中都不會有三數成等差；例如：$0<1<3<4<9<10<12<13$。因此，$S(13)\ge 7$。

以下證明：在 0 與 13 之間任意插入 7 個整數，則這 9 個數中必有三數成等差。設 $0<a_1<a_2<\cdots<a_7<13$，並令 $b_k=a_{k+1}-a_1$，則 $0<b_1<b_2<\cdots<b_6<13-a_1$。由 $S(13-a_1)\le S(12)=6$ 可知：$0,b_1,b_2,\cdots,b_6,13-a_1$ 中必有三數成等差，由此可得 $a_1,a_2,\cdots,a_7,13$ 中有三數成等差。因此，$0,a_1,a_2,\cdots,a_7,13$ 中也有三數成等差，故 $S(13)=7$。

(2) **證明：** $S(14)=7$

首先，$S(14)\ge S(13)\ge 7$。事實上，在 0 與 14 之間可以插入 6 個整數，使這 8 個數中都不會有三數成等差；例如：$0<1<3<4<10<11<13<14$。

以下證明：在 0 與 14 之間任意插入 7 個整數，則這 9 個數中必有三數成等差。設 $0<a_1<a_2<\cdots<a_7<14$。

(i) 當 $a_1\ge 2$ 時，令 $b_k=a_{k+1}-a_1$，則

$$0<b_1<b_2<\cdots<b_6<14-a_1\le 12。$$

由 $S(14-a_1)\le S(12)=6$ 可知：$0,b_1,b_2,\cdots,b_6,14-a_1$ 中必有三數成等差；由此可得：$a_1,a_2,\cdots,a_7,14$ 中有三數成等差，故原 9 數中必有三數成等差。

(ii) 當 $a_1=1$ 時，若 $a_2=2$，則 $0,a_1,a_2$ 三數成等差。若 $a_2\ge 3$，令 $c_k=a_{k+2}-a_2$，則 $0<c_1<c_2<\cdots<c_5<14-a_2\le 11$。

由 $S(14-a_2)\le S(11)=5$ 可知：$0,c_1,c_2,\cdots,c_5,14-a_2$ 中必有三數成等差；由此可得：$a_2,a_3,\cdots,a_7,14$ 中有三數成等差，故原 9 數中必有三數成等差。

【**另解**】我們可證明：$7\le S(13)\le S(14)\le 7$。

在 0 與 14 之間隨意插入 7 個整數，使得 $0<a_1<a_2<\cdots<a_7<14$。

(i) 若插入的某一數 $a_p=7$，則由鴿籠原理得知：其他插入的數中必有三數滿足：

(A) $0<a_i<a_j<a_k<7=a_p$　　或　　(B) $7=a_p<a_i<a_j<a_k<14$。

情況(A)：由 $S(7)=3$，可知數列 $0,a_i,a_j,a_k,a_p$ 中必有三數成等差；故原 9 數中必有三數成等差。

情況(B)：$7=a_p<a_i<a_j<a_k<14$ 等價於 $0<a_i-7<a_j-7<a_k-7<7$。由 $S(7)=$　，可知數列 $0,a_i-7,a_j-7,a_k-7,7$ 中必有三數成等差，即數列 $a_p,\ a_i,\ a_j,\ a_k,\ 1$ 中必有三數成等差；故原 9 數中也會有三數成等差。

(ii) 若 $a_p\ne 7,\ \forall\, p=1,2,\cdots,7$，則由鴿籠原理得知：插入的數中必有四數滿足：

(A) $0<a_i<a_j<a_k<a_m<7$　　或　　(B) $7<a_i<a_j<a_k<a_m<14$。

情況(A)：由 $S(a_m)\le S(7)=3$，可知數列 $0,a_i,a_j,a_k,a_m$ 中必有三數成等差；故原 9 數中必有三數成等差。

情況(B)：由 $7<a_i<a_j<a_k<a_m<14$，得知 $0<a_j-a_i<a_k-a_i<a_m-a_i<14-a_i$。由 $S(14-a_i)\le S(7)=3$，可知數列 $0,a_j-a_i,a_k-a_i,a_m-a_i,14-a_i$ 中必有三數成等差，即數列 $a_i,a_j,a_k,a_m,14$ 中必有三數成等差；故原 9 數中也會有三數成等差。

由此得證：在 0 與 14 之間任意插入 7 個整數，則這 9 個數中必有三數成等差。於是，$S(14)\le$　。另一方面，在 0 與 14 之間可以插入 6 個整數，使這 8 個數中都不會有三數成等差；例如：$0<1<3<4<10<11<13<14$；故 $S(14)\ge 7$。因此，$S(14)=7$。

一般而言，我們可推得以下不等式：

$$S(2n-1)\le 2S(n)+1 \quad 且 \quad S(2n)\le 2S(n)+1。$$

【筆試二】第二題

若正整數 m 可以表成

$$m=\sum_{k=1}^{103}\frac{k}{a_k}=\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\cdots+\frac{103}{a_{103}}\ ,$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_{103}$ 都是正整數，則稱 m 是一個「好數」。試求所有好數的個數。

【解】對任意正整數 n，我們證明：可以表成 $m=\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\cdots+\frac{n}{a_n}$ 的好數個數為 $\frac{n(n+1)}{2}$。

因此，當 $n=103$ 時，好數的個數為 $\frac{103\cdot 104}{2}=5356$ 。

因為每一個 $a_i\geq 1$，可以得知：$m\leq 1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$。

以下要證明：正整數 $1,2,3,\cdots,\frac{n(n+1)}{2}$ 都是好數。

首先，證明引理：對於每個正整數 $t\leq\frac{k(k+1)}{2}$，皆存在 $\{1,2,\ldots,k\}$ 的子集 A，使得 $\sum_{i\in A}i=t$。

我們對 k 做數學歸納法。當 $k=1$ 時，$t=1$，取 $A=\{1\}$。假設當 $k=n$ 時，命題成立。

現在考慮 $k=n+1$。

情形一： $1\leq t\leq n+1<\frac{n(n+1)}{2}$。由歸納假設知，存在子集合 A_1，使得 $\sum_{i\in A_1}i=t$。

情形二 ：$n+2\leq t\leq\frac{(n+1)(n+2)}{2}$。 注意到，$\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$。

令 $s=t-(n+1)$。 由歸納假設知，存在子集合 A_2，使得 $\sum_{i\in A_2}i=s$。

令 $A_3:=A_2\cup\{n+1\}$，則 $\sum_{i\in A_3}i=s+(n+1)=t$。

現在回到原題目。顯然地，$m=1$ 時，命題成立。當 $2\leq m\leq\frac{n(n+1)}{2}$ 時，$1\leq m-1<\frac{n(n+1)}{2}$，由上述引理知，存在 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的子集 A，使得 $\sum_{i\in A}i=m-1$。假設 A 的元素個數為 p，並令

$$a_i=\begin{cases}1 & ,\ \text{當}\ i\in A\ \text{時}\\ i(n-p) & ,\ \text{當}\ i\notin A\ \text{時}\end{cases},$$

則

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\cdots+\frac{n}{a_n}=\sum_{i\in A}\frac{i}{a_i}+\sum_{i\notin A}\frac{i}{a_i}=\sum_{i\in A}i+\sum_{i\notin A}\frac{i}{i(n-p)}=(m-1)+\frac{1}{n-p}\cdot(n-p)=m\ 。$$

【筆試二】第三題

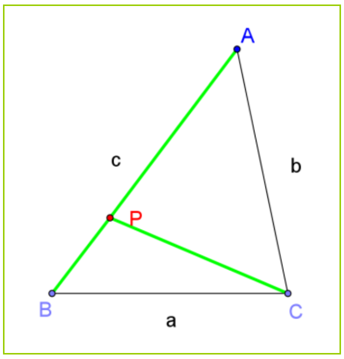
設 ΔABC 的三邊長滿足 $\overline{BC} \le \overline{CA}$ 及 $\overline{BC} \le \overline{AB}$，試證：對於 ΔABC 的內部每個點 P，恆有

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}<\overline{CA}+\overline{AB}\text{ 。}$$

【解說】

令 ΔABC 中三邊長 $\overline{BC}=a$， $\overline{CA}=b$ 及 $\overline{AB}=c$ 。

(1) 當 P 在 $\overline{AB}$ 的內部，如圖(一)：



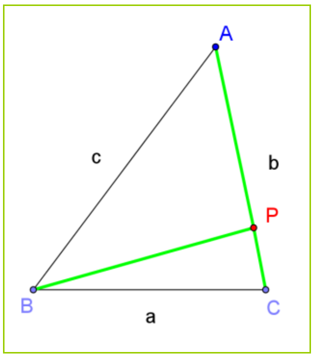
圖(一)

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}=c+\overline{PC}$$

因 $\overline{AC} \ge \overline{BC}$，故 $\overline{PC}<\overline{AC}$ 。

於是得知 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}<c+b$ 。

(2) 當 P 在 $\overline{AC}$ 的內部，如圖(二)：



圖(二)

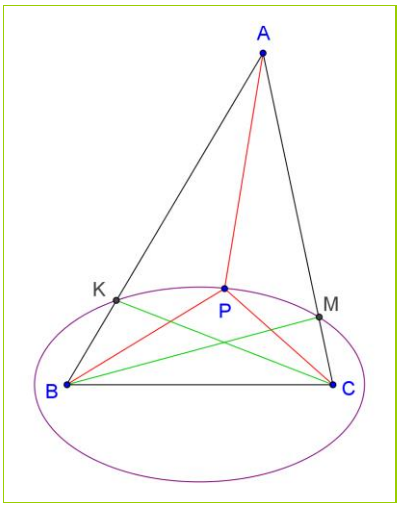
$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}=b+\overline{PB}$$

因 $\overline{AB} \geq \overline{BC}$，故 $\overline{PB} < \overline{AB}$ 。

於是得知 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC} < c+b$ 。

(3) (關鍵步驟)

當 P 在 ΔABC 的內部，如圖(三)：



圖(三)

由 $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ 都是過 P 的線段，其長和 $\overline{PB}+\overline{PC}$，知存在以 B, C 為兩焦點，定長和 $\overline{PB}+\overline{PC}$ 的橢圓 Γ，Γ 通過 P 點且與 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 分別交於 K, M，則

$$\overline{PB}+\overline{PC}=\overline{KB}+\overline{KC}=\overline{MB}+\overline{MC} 。$$

此時亦知 P 在 ΔAKM 的內部，$\overline{AP}$ 小於 $\overline{AK}$ 或小於 $\overline{AM}$ 。

不妨設 $\overline{AP} < \overline{AK}$，則

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}=\overline{PA}+\overline{KB}+\overline{KC}<\overline{KA}+\overline{KB}+\overline{KC},$$

而由(1)之情況(此時 K 為 ΔABC，$\overline{AB}$ 內部的一點)

$$\overline{KA}+\overline{KB}+\overline{KC} < c+b 。$$

故

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC} < c+b,$$

得證。