

103 學年度普通型高級中等學校數學及自然學科能力競賽  
數學科能力競賽決賽

筆試試題 (二)

編號：\_\_\_\_\_ (學生自填)

注意事項：

- (1) 時間：2 小時 (16:00~18:00)
- (2) 配分：每題皆為 7 分
- (3) 不可使用計算器
- (4) 請將答案依序寫在答案卷內

---

一、設  $m, n$  為正整數，且  $m < n$ 。若在 0 與  $n$  之間插入任意  $m$  個整數

$$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_m < n,$$

必滿足：數列  $0, a_1, a_2, \cdots, a_m, n$  中都會有三數形成等差數列，則稱  $m$  為  $n$  的「等差數」；例如：3, 4, 5, 6 都是 7 的等差數。設  $S(n)$  表示  $n$  的最小等差數，且已知  $S(2)=1$ 、 $S(7)=3$ 、 $S(11)=5$ 、 $S(12)=6$ 。試求  $S(13)$  與  $S(14)$  之值。

二、若正整數  $m$  可以表成

$$m = \sum_{k=1}^{103} \frac{k}{a_k} = \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \cdots + \frac{103}{a_{103}},$$

其中  $a_1, a_2, \cdots, a_{103}$  都是正整數，則稱  $m$  是一個「好數」。試求所有好數的個數。

三、設  $\triangle ABC$  的三邊長滿足  $\overline{BC} \leq \overline{CA}$  及  $\overline{BC} \leq \overline{AB}$ 。試證：對於  $\triangle ABC$  的內部每個點

$P$ ，恆有

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{CA} + \overline{AB}。$$