103 學年度普通型高級中等學校數學及自然學科能力競賽
數學科能力競賽決賽**筆試**試題參考解答

【筆試一】第一題

設 a,b,c 都是正數，且 $a+b+c=3$。試證：

$$(3-2a)(3-2b)(3-2c)\le a^2b^2c^2\text{ 。}$$

【解】不失一般性，不妨假設 $a\le b\le c$。

(1) 如果 $a+b\le c$，由 $3=a+b+c\le 2c\Rightarrow c\ge\frac{3}{2}$。又 $3=a+b+c\ge 3a\Rightarrow a\le 1<\frac{3}{2}$,

同理，$b<\frac{3}{2}$。因此，$(3-2a)(3-2b)(3-2c)<0\le a^2b^2c^2$。

(2) 如果 $a+b>c$，令 $s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2}$，則

$$(3-2a)(3-2b)(3-2c)\le a^2b^2c^2\Leftrightarrow 8(s-a)(s-b)(s-c)\le a^2b^2c^2\text{。}$$

我們可考慮三邊長為 a,b,c 的一個三角形，由三角形面積公式知：

$$\Delta^2=s(s-a)(s-b)(s-c)=(\frac{abc}{4R})^2\text{ ，}$$

其中 Δ 為三角形面積，R 為三角形外接圓的半徑。因此，

$$(3-2a)(3-2b)(3-2c)\le a^2b^2c^2\Leftrightarrow 8(s-a)(s-b)(s-c)\le a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow 8\Delta^2\le s(abc)^2=24R^2\Delta^2\Leftrightarrow 1\le 3R^2\Leftrightarrow R\ge\frac{1}{\sqrt{3}}\text{ 。}$$

利用正弦定理及合分比性質，得

$$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}\text{ 。}$$

又函數 $f(x)=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 是一凹函數，故

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\le\sin\frac{A+B+C}{3}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ ，}$$

即 $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$。所以，

$$2R=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}\ge\frac{2}{3\sqrt{3}}(a+b+c)=\frac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow R\ge\frac{1}{\sqrt{3}}\text{ ， 得證。}$$

【筆試一】第二題

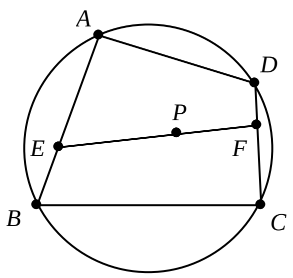
設 $ABCD$ 是一圓內接四邊形，點 E 與點 F 分別在 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 上，且滿足

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{\overline{CF}}{\overline{FD}}\text{。}$$

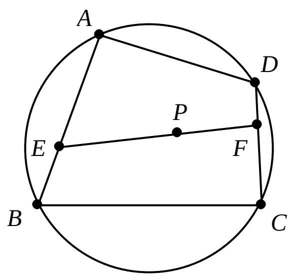
試證：若點 P 在 $\overline{EF}$ 上且滿足

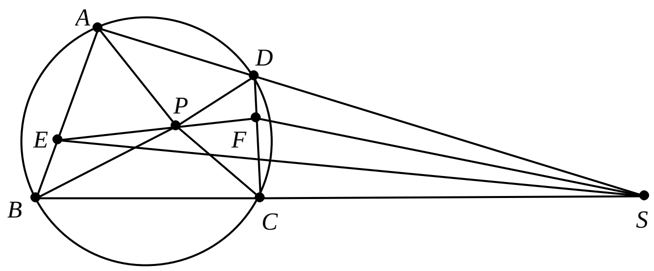
$$\frac{\overline{PE}}{\overline{PF}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}\text{，}$$

則 ΔAPD 與 ΔBPC 的面積比和 E、F 在所屬線段上的位置無關。



證：





設直線 AD 與 BC 不平行且交點為 S。因為 $ABCD$ 是圓內接四邊形，所以，$\angle SAB=\angle SCD$。由此知ΔASB 與ΔCSD 相似。因為 $\overline{AE}/\overline{EB}=\overline{CF}/\overline{FD}$，所以，可得 $\overline{AE}/\overline{AB}=\overline{CF}/\overline{CD}$，$\overline{AE}/\overline{CF}=\overline{AB}/\overline{CD}=\overline{AS}/\overline{CS}$。由此知$\Delta ASE$ 與ΔCSF 相似。於是，可得

$$\angle DSE=\angle CSF\text{，}$$

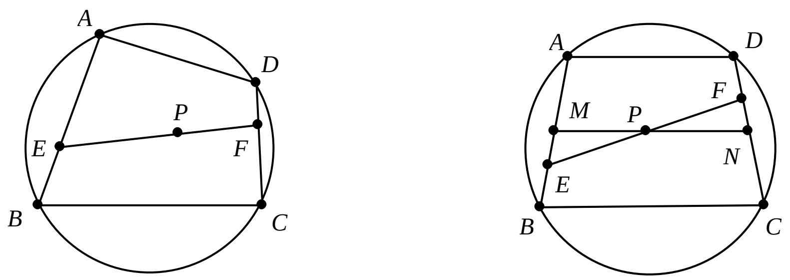
$$\frac{\overline{SE}}{\overline{SF}}=\frac{\overline{SA}}{\overline{SC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{PE}}{\overline{PF}}\text{。}$$

根據角平分線的性質，可知

$$\angle ESP=\angle FSP\text{。}$$

再由 $\angle DSE=\angle CSF$ 可得 $\angle DSF=\angle CSE$，進一步知 $\angle CSP=\angle DSP$，亦即：直線 SP 平

分 $\angle ASB$。於是，點 P 至直線 AD 與直線 BC 的距離相等，由此可知：三角形ΔAPD 與ΔBPC 的面積之比值等於底邊長之比值 $\overline{AD}/\overline{BC}$，此值與點 E、F 在所屬線段上的位置無關。



其次，設直線 AD 與 BC 平行，則圓內接四邊形 $ABCD$ 是一等腰梯形，亦即：$\overline{AB}=\overline{CD}$。因為 $\overline{AE}/\overline{EB}=\overline{CF}/\overline{FD}$，所以，$\overline{BE}=\overline{DF}$。令 M 與 N 分別表示 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的中點，則 $\overline{ME}=\overline{NF}$。因為 $\angle AMN=\angle DNM$，所以，點 E 與 F 至直線 MN 等距離，$\overline{EF}$ 的中點在 $\overline{MN}$ 上。因為點 P 在 $\overline{EF}$ 上且滿足 $\overline{PE}/\overline{PF}=\overline{AB}/\overline{CD}=1$，所以，點 P 是 $\overline{EF}$ 的中點，進一步知點 P 是 $\overline{MN}$ 的中點。三角形ΔAPD 與ΔBPC 的面積之比值等於底邊長之比值 $\overline{AD}/\overline{BC}$，此值與點 E、F 在所屬線段上的位置無關。

【筆試一】第三題

將 3466 表示成 n 個正整數的四次方之和：$3466 = a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4$，其中 $1 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$。試問 n 的最小值為何？並對此最小值寫出所有對應的表示式。

【解】 因為 $(\text{偶數})^4 \equiv 0 \pmod{16}$，$(\text{奇數})^4 \equiv 1 \pmod{16}$，$3466 = 216 \times 16 + 10$，所以，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的奇數個數必是 $16k+10$ 的形式。於是，$n \ge 10$。

若 $n = 10$，則 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 都必須是奇數。對每個 $i = 1, 2, \cdots, 10$，令

$$b_i = \frac{a_i^4 - 1}{16}。$$

因為 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 都是不大於 7 的奇數，所以，$b_i \in \{0, 5, 39, 150\} (1 \le i \le 10)$ 而且 $b_1 + b_2 + \cdots + b_{10} = 216$。因為方程式 $5x + 39y + 150z = 216$ 只有一組非負整數解 $(x, y, z) = (12, 4, 0)$，但此組解沒有滿足 $x + y + z \le 10$，所以不能提供本題的答案。於是，$n \ge 11$。

若 $n = 11$，則 $a_1, a_2, \cdots, a_{11}$ 中恰有一個是不大於 6 的偶數而其餘十個都是不大於 7 的奇數，設 a_{11} 是不大於 6 的偶數。令

$$b_i = \frac{a_i^4 - 1}{16} \ (i = 1, 2, \cdots, 10)，\text{且} \ b_{11} = \frac{a_{11}^4}{16}。$$

因為 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 都是不大於 7 的奇數，所以，$b_i \in \{0, 5, 39, 150\} (1 \le i \le 10)$ 而 $b_{11} \in \{1, 16, 81\}$ 而且 $b_1 + b_2 + \cdots + b_{10} + b_{11} = 216$。

(i) 當 $b_{11} = 1$ 時，因為方程式 $5x + 39y + 150z = 216 - 1$ 共有三組非負整數解

$$(x, y, z) = (43, 0, 0)、(4, 5, 0) 與 (13, 0, 1)，$$

但其中的第一組與第三組解沒有滿足 $x + y + z \le 10$，所以，只有第二組解可提供本題的一個答案：

$$3466 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 3^4 + 3^4 + 3^4 + 5^4 + 5^4 + 5^4 + 5^4 + 5^4。$$

(ii) 當 $b_{11} = 16$ 時，因為方程式 $5x + 39y + 150z = 216 - 16$ 共三組非負整數解

$$(x, y, z) = (40, 0, 0)、(1, 5, 0) 以及 (10, 0, 1)，$$

但其中的第一組解與第三組解沒有滿足 $x + y + z \le 10$，所以，只有第二組解可提供本題另一個答案：

$$3466 = 1^4 + 1^4 + 1^4 + 1^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + 5^4 + 5^4 + 5^4 + 5^4。$$

(iii) 當 $b_{11} = 81$ 時，因為方程式 $5x + 39y + 150z = 135$ 只有一組非負整數解 $(x, y, z) = (27, 0, 0)$，但此解沒有滿足 $x + y + z \le 10$，所以不能提供本題的答案。

綜合以上的討論，n 的最小值為 11，對此最小值恰有兩種對應的表示式。