103 學年度普通型高級中等學校數學及自然學科能力競賽
數學科能力競賽決賽獨立研究試題參考解答

【獨立研究二】第一題

設 n 為正整數。從下列 n 列 n 行的表中每一列各取一數，使得取出的 n 個數中任二數都不在同一行。

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & \cdots & \frac{1}{2n+3} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{1}{2n-1} & \frac{1}{2n+1} & \frac{1}{2n+3} & \cdots & \frac{1}{4n-3}
\end{array}$$

令取出的 n 個數之和為 S ，試證 $S \ge \dfrac{n}{2n-1}$ ；並找出 $S = \dfrac{n}{2n-1}$ 等號成立的充要條件。

【解】令 N_{ij} 表第 i 列、第 j 行的數，即 $N_{ij} = \dfrac{1}{2(i+j)-3}$ 。

設第 k 列所取的數位在第 j_k 行 $(k=1,2,\cdots,n)$ ，則我們有

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{N_{kj_k}} = \sum_{k=1}^{n} 2(k+j_k)-3 = 4\sum_{k=1}^{n} k - 3n$$

$$= 4\cdot\frac{n(n+1)}{2} - 3n = 2n^2 - n \text{ 。}$$

因為 $S = \sum_{k=1}^{n} N_{kj_k}$，所以利用柯西不等式，得 $S \times \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{N_{kj_k}} \ge n^2$ ，

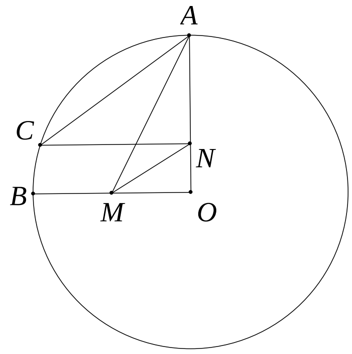
即 $S \times (2n^2 - n) \ge n^2$，得知 $S \ge \dfrac{n}{2n-1}$ 。

更進一步，$S = \dfrac{n}{2n-1}$ 等號成立的充要條件為柯西不等式等號成立時，即

$$N_{1j_1}{}^2 = N_{2j_2}{}^2 = \cdots = N_{nj_n}{}^2 \text{ 且 } N_{1j_1} + N_{2j_2} + \cdots + N_{nj_n} = S = \frac{n}{2n-1} \text{ 。}$$

故 $N_{kj_k} = \dfrac{1}{2(k+j_k)-3} = \dfrac{1}{2n-1}\ (k=1,2,3,\cdots,n)$ ，即取到的數為次對角線。

【獨立研究二】第二題



如圖，設O為圓心，$\overline{OA}$、$\overline{OB}$為互相垂直的兩條半徑；
點M為$\overline{OB}$的中點；過點M作$\angle AMO$的角平分線，
交$\overline{OA}$於點N；過點N作$\overline{OB}$的平行線交AB劣弧於點C；
則$\angle ACN$為多少度？

【解】

(1) 在不失一般性的原則下，不妨設圓O的半徑為 2，因此$\overline{OM}=1$，$\overline{OA}=2$；因而由畢氏定理$\overline{AM}=\sqrt{5}$。

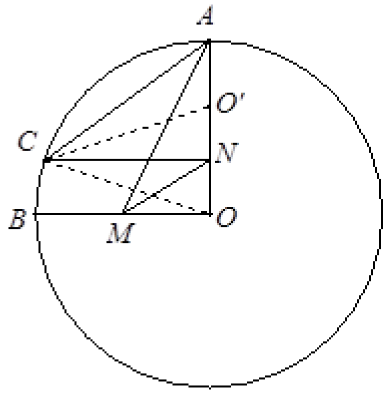
由內分比定理可知$\dfrac{\overline{MO}}{\overline{MA}}=\dfrac{\overline{NO}}{\overline{NA}}$。

由和分比性質可得

$$\frac{\overline{MO}}{\overline{MA}+\overline{MO}}=\frac{\overline{NO}}{\overline{NA}+\overline{NO}}。$$

因為$\overline{NA}+\overline{NO}=\overline{OA}=\overline{OC}=2$，由此可得

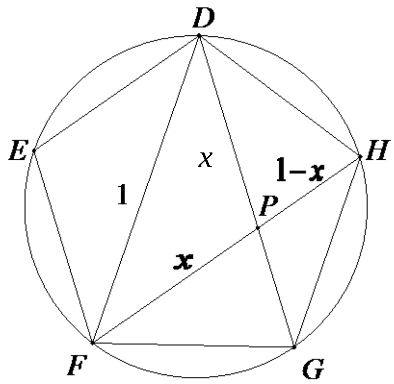
$$\frac{\overline{NO}}{\overline{OC}}=\frac{1}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}。$$



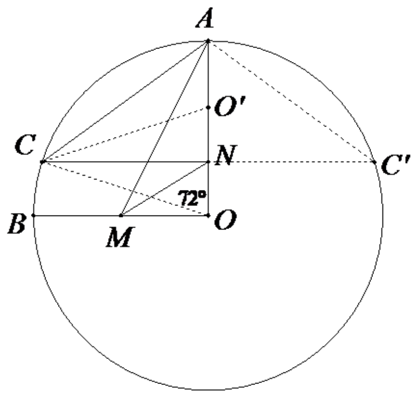
（圖一）

如(圖一)所示，將點O對$\overline{BN}$做鏡射得到點O'，則

$$\frac{\overline{OO'}}{\overline{OC}}=\frac{2\overline{NO}}{\overline{OC}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$，此為黃金比例。



(圖二)



(圖三)

(2) 現在我們證明：正五邊形邊長與對角線長的比即為黃金比。

首先我們證明：正五邊形的對角線平行於其對邊，即證明(圖二)中，$\overline{DF}\,//\,\overline{HG}$.

顯然$\angle DFG=\dfrac{DG}{2}=\dfrac{2}{5}\,\dfrac{360°}{2}=72°$，$\angle HGF=\dfrac{HGF}{2}=\dfrac{3}{5}\,\dfrac{360°}{2}=108°$。由於$\angle DFC$與$\angle HGF$互補，所以$\overline{DF}\,//\,\overline{HG}$。

接著證明：正五邊形邊長與對角線長的比即為黃金比。在不失一般性的原則下，設正五邊形的邊長為x，對角線長為 1，如(圖二)所示。由於正五邊形任一對角線都平行於其對邊，所以 $DPFE$ 為平行四邊形，因而$\overline{FP}=\overline{DE}$。又因

$\angle HGP = \angle PFD$，所以 $\Delta DFP \sim \Delta HGI$，因而 $\dfrac{\overline{HG}}{\overline{FD}} = \dfrac{\overline{HP}}{\overline{PD}}$. 由此可得 $\dfrac{x}{1} = \dfrac{1-x}{x}$，

即 $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，此為黃金比例。

(3)現在回到原問題，由於 $\dfrac{\overline{OO'}}{\overline{CO}} = \dfrac{\overline{FG}}{\overline{DF}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，且 $\Delta OCO'$ 與 ΔFDG 均為等腰三角形，所以 $\Delta OCO' \sim \Delta FDG$. 因此 $\angle COO' = \angle DFG = 72°$. 將點 C 對 $\overline{AO}$ 作鏡射得到點 C'，如(圖三)所示. 故，$\angle ACN = \angle C' = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{72°}{2} = 36°$。

【參考解答二】：用此解法，若未求出 $\angle ACN = 36°$，最多只得 4 分.

同【參考解答一】可得：$\dfrac{\overline{NO}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{NO}}{\overline{OA}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$。

$\overline{NO} = \overline{OA} \cdot \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，$\overline{AN} = \overline{AO} - \overline{NO} = 2 - \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$。

由畢氏定理，$\overline{CN}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{ON}^2 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \ \Rightarrow \ \overline{CN} = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$。

再由畢氏定理，$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AN}^2 + \overline{CN}^2} = (3-\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}$。

設 $\overline{CA}$ 與 $\overline{CN}$ 的夾角為 θ，即 $\angle ACN = \theta$, O 點的坐標為 $(0,0)$, B 點的坐標為 $(-2,0)$, A 點的坐標為 $(0,2)$，則 N 點的坐標為 $(0, \dfrac{\sqrt{5}-1}{2})$, C 點的坐標為 $(-\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}, \dfrac{\sqrt{5}-1}{2})$,

$\overrightarrow{CN} = (\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}, 0)$，$\overrightarrow{CA} = (\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}, \dfrac{5-\sqrt{5}}{2})$。

由餘弦定理 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CN} = \overline{CA} \times \overline{CN} \times \cos\theta$，所以

$$\angle ACN = \cos^{-1} \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CN}}{\overline{CA} \times \overline{CN}} = \cos^{-1} \frac{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}{(3-\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}(\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}})} = \cos^{-1}\frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{\pi}{5} = 36°$$ 。

【獨立研究二】第三題

試找出滿足 $16p^2(3m-2n)=n^2(3m+2n)$ 的所有正整數 m,n 及質數 p 。

【解】分成 m 為奇數和 m 為偶數兩種情形。

(1) m 為奇數：

由原式知 n 為 4 的倍數，設 $n=4c$ ，原式可化為 $(\frac{p}{c})^2=\frac{3m+8c}{3m-8c}>1$

又 p 為質數，故 $(p,c)=1$，且 $1\le c<p$ 。 <1>

設 $(3m+8c,3m-8c)=d$ 且 $3m+8c=da^2, 3m-8c=db^2$ ，其中 $(a,b)=1$。

由<1>可得 $a\mid p$ ，故 $a=p$ ，得知 $b=c$ ；即得 $\begin{cases}3m+8c=dp^2\\3m-8c=dc^2\end{cases}$ 。

於是，兩式相減可得：$16c=d(p^2-c^2)$ 。 <2>

(i) 若 $p=2$ ，則 $c=1$，此時 $16=3d$ ，不合。

(ii) 若 $p>2$ ，則 $c\mid dp^2$ ，由 $(p,c)=1$，得 $c\mid d$ 。

設 $d=c\ell$ 代入<2>並化簡得 $16=\ell(p+c)(p-c)$ 。因此， $p+c=4$ ，8 或 16。

當 $p+c=4$ 時， $p=3,\ c=1,\ \ell=2,\ d=2\Rightarrow 3m=8c+dc^2=8+2=10$ ，不合。

當 $p+c=8$ 時， $p=5$ 或 $p=7$ 。

若 $p=5$ ，則 $c=3,\ \ell=1,\ d=3,\ n=12\Rightarrow 3m=8c+dc^2=51\ \Rightarrow m=17$ (合)

若 $p=7$ ，則 $c=1,\ p-c=6$ ，不合。

當 $p+c=16$ 時， $p-c=1,\ \ell=1\ \Rightarrow p=\frac{17}{2}$ ，不合。

因此，$(m,n,p)=(17,12,5)$ ，代入原式檢驗合。

(2) m 為偶數：

令 $m=2c$ ，此時原式為 $(\frac{4p}{n})^2=\frac{3c+n}{3c-n}>1$ 。

設 $\frac{4p}{n}=\frac{a}{b}$ ，其中 $(a,b)=1$， $a>b\ge 1$。 <3>

若 $(3c+n,3c-n)=d$ ，則 $\begin{cases}3c+n=da^2\\3c-n=db^2\end{cases}$ 。

兩式相減可得： $2n=d(a^2-b^2)$ 。 代入<3>並化簡得：$8pb=da(a^2-b^2)$ <4>

① 若 a 和 b 為一奇一偶，則 d 為偶數。

可令 $d=2\ell$ ，代入<4>並整理得： $b(4p+\ell ab)=\ell a^3$ ，故 $b\mid\ell$ 。

設 $\ell=br$ ，則 $4p=ra(a+b)(a-b)$ 。於是可得：

$$ra=4,\ p=(a+b)(a- \quad \Rightarrow \begin{cases} ra=4 \\ a+b=p \\ a-b=1 \end{cases}$$ 。

由此可推得：$(m,n,p)=(50,21,7)$ ，代入原式檢驗合。

② 若 a 和 b 均為奇數，則由<3>可得：$4|n$ 。

設 $n=4k<4p$ 。 代入<4> 可得：$a|p \ \Rightarrow \ a=p,\ b=k,\ n=4b$ 。

由<4>得：$8b=d(p^2-b^2)$ 。 <5>

(i) 若 $p=2$ ，則 $b=1 \quad \Rightarrow \quad 8=3d$ ，不合。

(ii) 若 $p>2$ ，設 $p^2-b^2=8\ell$ ，則 $b=d\ell$ ，即 $d|b$ 。

又由<5>，$b|dp^2$ 。因 $(b,p)=1$，可得 $b|d$ ，故 $d=b,\ \ell=1$。

於是， $p^2-b^2=(p+b)(p-b)=8$ 。

若 $\begin{cases} p+b=8 \\ p-b=1 \end{cases}$ ，則 $p=\dfrac{7}{2}$ ，不合。

若 $\begin{cases} p+b=4 \\ p-b=2 \end{cases}$ ，則 $p=3,\ d=k=b=1 \quad \Rightarrow \quad n=4b=4$ 。

於是，$3c=n+db^2=4+1=5$ ，不合。

綜合以上討論：共兩組解 $(m,n,p)=(17,12,5)$ 及 $(50,21,7)$ 。