# 103學年度普通型高級中等學校數學及自然學科能力競賽
# 數學科能力競賽決賽獨立研究試題參考解答

**【獨立研究一】第一題**

當正整數 $a,b,c$ 滿足 $a^2+b^2=c^2$ 時，稱 $a,b,c$ 為一組「畢氏三元數」(此時，$a,b,c$ 與 $b,a,c$ 視為相同的畢氏三元數)。試問有多少組畢氏三元數，使其成為直角三角形的三邊長，且內切圓半徑等於 2014？

**【解】**令 $r=2014$。

此時，$2r=a+b-c \Leftrightarrow c=a+b-2r$，且 $a>2r$，$b>2r$。

由 $a^2+b^2=c^2$，得

$$a^2+b^2=(a+b-2r)^2=a^2+b^2-4br-4ar+2ab+4r^2$$

$$\Leftrightarrow\ 4ar+4br-2ab=4r^2 \quad \Leftrightarrow \quad ab-2ar-2br+4r^2=2r^2$$

$$\Leftrightarrow\ (a-2r)(b-2r)=2r^2$$。

代入 $r=2014$ 得：

$$(a-4028)(b-4028)=2\times 2014^2=2^3\times(1007)^2$$

$$=2^3\times(19\times 53)^2=2^3\times 19^2\times 53^2$$。

不妨設 $a>b$，則 $(a-4028)$、$(b-4028)$ 為二正整數，且

$$(a-4028)(b-4028)=2^3\times 19^2\times 53^2$$，

而 2,19,53 都是質數，故此時 $a,b$ 為正整數解的個數有

$$\frac{(3+1)(2+1)(2+1)}{2}=18\text{(組)}$$。

綜合上述討論，得知：共有 18 組畢氏三元數所形成的直角三角形，其內切圓半徑都是 2014。

**【獨立研究一】第二題**

設 $\mathbb{R}$ 表示所有實數所成的集合。試求所有的函數 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 滿足：

對任意實數 $x, y$ ， $f(xf(x)+f(y))=x^2+y$ 恆成立。

**【解】**容易驗證：函數 $f(x)=x$ 及 $f(x)=-x$ 均滿足所求。現證明滿足所求的函數只有這兩個。

假設 $f(x)$ 為一個滿足條件的函數，以 $x=0$ 代入方程式可得：

$$f(f(y))=y,\ \forall\ y\in\mathbb{R} \text{。}$$

因此，對所有的 $x, y\in\mathbb{R}$，

$$x^2+y=f(xf(x)+f(y))=f(f(x)f(f(x))+f(y))=(f(x))^2+y \text{。}$$

由此可得： $(f(x))^2=x^2,\ \forall\ x\in\mathbb{R}$ 。因此， $f(1)=1$ 或 $f(1)=-1$。

(1) 若 $f(1)=1$，則

$$\begin{aligned}1+2x+x^2&=(f(1+x))^2=(f(1f(1)+f(f(x))))^2=(1^2+f(x))^2\\&=1+2f(x)+(f(x))^2=1+2f(x)+x^2\text{。}\end{aligned}$$

因此， $f(x)=x,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$ 。

(2) 若 $f(1)=-1$， 則

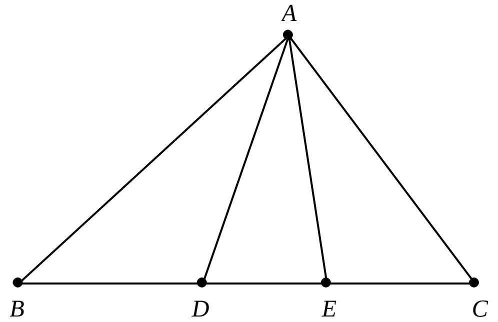
$$\begin{aligned}1-2x+x^2&=(f(-1+x))^2=(f(1f(1)+f(f(x))))^2=(1^2+f(x))^2\\&=1+2f(x)+(f(x))^2=1+2f(x)+x^2\text{。}\end{aligned}$$

因此, $f(x)=-x,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$ 。

**【獨立研究一】第三題**

在 $\Delta ABC$ 中，已知點 $D$ 與點 $E$ 在 $\overline{BC}$ 上，且滿足 $\angle BAD = \angle DAE = \angle EAC$ 。

試證：$\overline{DE} < \frac{1}{3}\overline{BC}$ 。




【證明】設 $\overline{AD} = a$，$\overline{AE} = b$，$\overline{DE} = c$，因為 $\angle DAE = \angle EAC$，所以

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EC}}.$$

因此可設 $\overline{AC} = ak$，$\overline{EC} = ck$.

由餘弦定理

$$\cos\angle DAE = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

$$\cos\angle EAC = \frac{b^2+a^2k^2-c^2k^2}{2abk}$$

因此

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{b^2+a^2k^2-c^2k^2}{2abk}$$

經整理可得

$$k^2\left(a^2-c^2\right)-\left(a^2+b^2-c^2\right)k+b^2=0$$

亦即

$$\left[\left(a^2-c^2\right)k-b^2\right](k-1)=0$$

得

$$k=\frac{b^2}{a^2-c^2} \text{ 或 } k=1$$

注意：若 $k=1$，則 $\overline{AD} = \overline{AC} = a$，此時 $\overline{AE} \perp \overline{DC}$，$a^2 = b^2 + c^2$，因此

$$\frac{b^2}{a^2-c^2}=\frac{b^2}{b^2}=1,$$

也就是說$k=\dfrac{b^2}{a^2-c^2}$恆成立。

由上討論知

$$\overline{EC}=ck=\frac{b^2}{a^2-c^2}\cdot c$$

同理可得

$$\overline{BD}=\frac{a^2}{b^2-c^2}\cdot c$$

以下證明$\overline{EC}+\overline{BD}>2\overline{DE}$（此與$\overline{DE}<\dfrac{1}{3}\overline{BC}$等價）

$$\begin{aligned}
&\overline{EC}+\overline{BD}=\frac{b^2}{a^2-c^2}\cdot c+\frac{a^2}{b^2-c^2}\cdot c\\
&\geq\frac{b^2}{a^2}\cdot c+\frac{a^2}{b^2}\cdot c\\
&=c\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)\\
&\geq 2c \qquad (\text{算幾不等式})\\
&=2\overline{DE}.
\end{aligned}$$