

103 學年度普通型高級中等學校數學及自然學科能力競賽  
數學科能力競賽決賽

獨立研究試題（一）

編號：\_\_\_\_\_（學生自填）

注意事項：

- (1) 三題中自選兩題作答
- (2) 時間：2 小時（8:10~10:10）
- (3) 配分：每題皆為 7 分
- (4) 不可使用計算器
- (5) 請將答案寫在答案卷內

---

一、當正整數  $a, b, c$  滿足  $a^2 + b^2 = c^2$  時，稱  $a, b, c$  為一組「畢氏三元數」(此時， $a, b, c$  與  $b, a, c$  視為相同的畢氏三元數)。試問有多少組畢氏三元數，使其成為直角三角形的三邊長，且內切圓半徑等於 2014？

二、設  $\mathbb{R}$  表示所有實數所成的集合。試求所有的函數  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  滿足：  
對任意實數  $x, y$ ， $f(xf(x) + f(y)) = x^2 + y$  恆成立。

三、在  $\triangle ABC$  中，已知點  $D$  與點  $E$  在  $\overline{BC}$  上，且滿足  $\angle BAD = \angle DAE = \angle EAC$ 。

試證： $\overline{DE} < \frac{1}{3} \overline{BC}$ 。

