103 學年度普通型高級中等學校數學及自然學科能力競賽
數學科能力競賽決賽口試試題參考解答

【口試 A】第一題

設 P 與 Q 為空間中二定點，ℓ 為空間中一直線，且 P、Q 與直線 ℓ 不共平面。試在直線 ℓ 上作出一點 M 使得：對於直線 ℓ 上每個點 X，恆有

$$\overline{PM}+\overline{QM}\le\overline{PX}+\overline{QX}\text{ 。}$$

【解說】

(1) 先找出 P 在直線 ℓ 上的投影點 O。

(2) 以 O 為旋轉中心，$\overline{OP}$ 為旋轉半徑，旋轉 ℓ 一圈得圓 O。

(3) 以 $\overleftrightarrow{OQ}$ 和 ℓ 兩直線所決定的平面 π。 π 交圓於兩點 S, T，其一與 Q 在 ℓ 的同側，設為 S, 另一與 Q 在 ℓ 的異側，則為 T。

(4) T, Q 在平面 π 上且在 ℓ 的異側，且 $\overline{TX}=\overline{PX},\ \forall X\in\ell$ 。

(5) 連 $\overline{TQ}$, $\overline{TQ}$ 交 ℓ 於一點 M，此點即為使得 $\overline{TM}+\overline{QM}\le\overline{TX}+\overline{QX}$ 對任一 ℓ 上的點 X 都成立。

(6) M 即為問題答案的點。

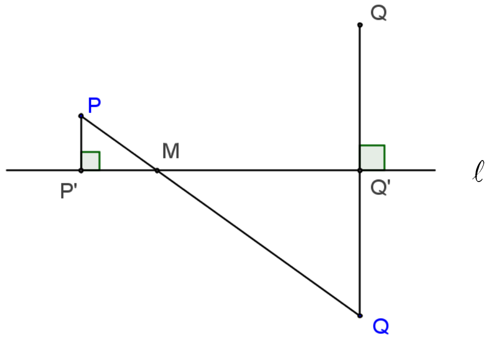
【理由】

$\overline{PM}+\overline{QM}=\overline{TM}+\overline{QM}\le\overline{TX}+\overline{QX}$, 而 $\overline{TX}=\overline{PX}$ ，

即 $\overline{PM}+\overline{QM}\le\overline{PX}+\overline{QX}$ 對 ℓ 上的任一點 X 都成立。

【註】

如果 P, Q 與直線 ℓ 共面，M 點就是 P, Q 在 ℓ 上的投影垂足 P', Q' 為端點，滿足 $\overline{P'M}:\overline{MQ'}=\overline{PP'}:\overline{QQ'}$ 的內分點 M; 如圖(一)。



圖(一) (P, Q 與 ℓ 共面)

一般 P, Q 與 ℓ 不共面時，將 P, Q 在 ℓ 上的投影垂足分別記為 P', Q' 時，M 點也是 $\overline{P'M}:\overline{MQ'}=\overline{PP'}:\overline{QQ'}$ 的內分點。本口試題的重點在於知道 M 點的找法時，其理由為何？

【代數解法】

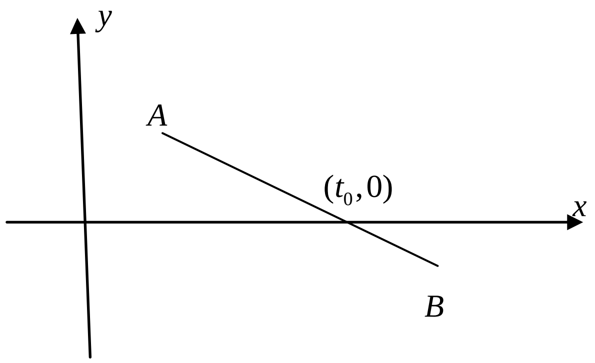
不失一般性，經平移後我們可設直線 ℓ 的參數式為 $x=at, y=bt, z=ct$，且設點 $M(at, bt, ct), P(x_1, y_1, z_1), Q(x_2, y_2, z_2)$，則

$$\overline{PM}+\overline{QM}=\sum_{k=1}^{2}\sqrt{(at-x_k)^2+(bt-y_k)^2+(ct-z_k)^2}$$
$$=\sum_{k=1}^{2}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)t^2-2(ax_k+by_k+cz_k)t+x_k^2+y_k^2+z_k^2}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\left(\sqrt{(t-u_1)^2+v_1^2}+\sqrt{(t-u_2)^2+v_2^2}\right),$$

其中，$u_k=\dfrac{ax_k+by_k+cz_k}{a^2+b^2+c^2}, v_k=\dfrac{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x_k^2+y_k^2+z_k^2)-(ax_k+by_k+cz_k)^2}}{a^2+b^2+c^2}$。

又坐標平面上 $g(t):=\sqrt{(t-u_1)^2+(0-v_1)^2}+\sqrt{(t-u_2)^2+(0+v_2)^2}$ 可以表示 x 軸上的點 $(t, 0)$ 到兩點 $A(u_1,v_1), B(u_2,-v_2)$ 的距離之和，且點 A 與點 B 在 x 軸的兩側，故 $g(t)$ 的最小值為 $\overline{AB}$。亦即 $\overline{AB}$ 與 x 軸的交點為 $(t_0, 0)$ 時，則 $g(t)$ 的最小值為 $g(t_0)=\overline{AB}$。此時，點 M 的坐標為 $M(at_0, bt_0, ct_0)$，且 $\overline{PM}+\overline{QM}$ 的最小值為

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{(u_1-u_2)^2+(v_1+v_2)^2}。$$



【口試 A】第二題

設數列$\langle a_n \rangle$滿足：$a_1=1, a_2=2$；當$n\ge 3$時，$a_n>a_{n-1}$，且a_n是不能表成a_i+a_j的最小正整數，其中$1\le i<j<n$。試求a_{103}之值。

【解】試算前幾項得$1,2,4,7,10,13$，故公式$a_n=3n-5$對於$n=3,4,5,6$皆成立。

以下證明此公式$a_n=3n-5$對任意正整數$n\ge 3$皆成立。

設$a_n=3n-5$對$n=3,4,5,\cdots,k$皆成立。則$a_{k+1}>a_k=3k-5$，且

$$a_{k+1}\ne a_1+a_k=3k-4,\quad a_{k+1}\ne a_2+a_k=3k-3。$$

故$a_{k+1}\ge 3k-2$。

在$a_1,a_2,\cdots,a_k$中，只有a_2除以3的餘數為2，其餘除以3的餘數皆為1。所以，其中任意兩數之和，除以3的餘數必為0或2，也就是餘數必不等於1。因此，$3k-2=3(k+1)-5\equiv 1 \pmod 3$ 是不能表成a_i+a_j (其中$1\le i<j<k+1$)的最小正整數，故$a_{k+1}=3k-2$。至此，命題由數學歸納法原理得證。

所以，$a_{103}=3\cdot 103-5=304$。