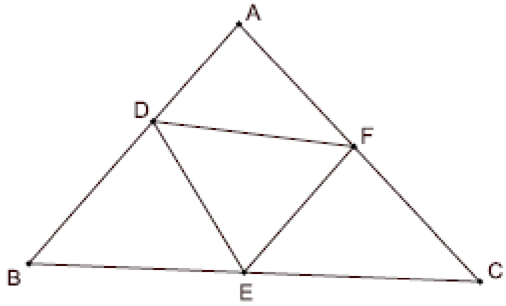
101 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

筆試試題（二）【參考解答】



一、【參考解答】

設 $\overline{AD}=u\overline{AB}, \overline{BE}=v\overline{BC}, \overline{CF}=w\overline{CA}$

則 $x=u(1-w), y=v(1-u), z=w(1-v)$

因此

$$xyz(x+y+z)=uvw(1-u)(1-v)(1-w)\cdot[u(1-w)+v(1-u)+w(1-v)]$$

注意到：

$$uvw(1-u)(1-v)(1-w)=u(1-u)v(1-v)w(1-w)\le\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

另外，令 $u(1-w)+v(1-u)+w(1-v)=a\le 1$

(1) 當 $a\le\frac{3}{4}$, 由算幾不等式知

$$u(1-w)v(1-u)w(1-v)\le\left[\frac{u(1-w)+v(1-u)+w(1-v)}{3}\right]^3=\left(\frac{a}{3}\right)^3$$

因此

$$xyz(x+y+z)\le\left(\frac{a}{3}\right)^3\cdot a\le\frac{1}{27}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{3}{4^4}$$

注意：當 $u=v=w=\frac{1}{2}$, 則 $a=\frac{3}{4}$ 且 $xyz(x+y+z)=\frac{3}{4^4}$

(2) 當 $a\ge\frac{3}{4}$, 觀察

$$a=u(1-w)+v(1-u)+w(1-v)=1-uvw-(1-u)(1-v)(1-w)$$

令 $uvw+(1-u)(1-v)(1-w)=b$, 則 $0\le b\le\frac{1}{4}$

由算幾不等式得知

$$uvw(1-u)(1-v)(1-w)\le\left[\frac{uvw+(1-u)(1-v)(1-w)}{2}\right]^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

因此

$$xyz(x+y+z)\le\left(\frac{b}{2}\right)^2(1-b)$$
$$=\frac{1}{4}(b^2-b^3)$$

$$\le \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^3\right) \qquad \text{(註)}$$
$$=\frac{3}{4^4}$$

故知 $xyz(x+y+z)$ 的最大值為 $\frac{3}{4^4}$

(註)可以證明 b^2-b^3 在 $b\in[0,\frac{1}{4}]$ 是遞增的

設 $\frac{1}{4}\ge h>k\ge 0,$ 則

$$\begin{aligned}(h^2-h^3)-(k^2-k^3)&=(h-k)(h+k)-(h-k)(h^2+hk+k^2)\\&=(h-k)(h+k-h^2-k^2+hk)\\&=(h-k)(h(1-h)+k(1-k)+hk)\\&>0\end{aligned}$$

二、【證明】

設 $D=1-4c$

由 $f(c-1)=c^2$ 知 $k<c$。接著證 $k<p$：

若 $b=p$ 或 $b>p$，可分別以 $b=0$ 及 $b=r$ 取代，其中 r 為 b 除以 p 的餘數，故可以假設 $0\le b<p$。

若 $b=0$，則 $p|D$，此時 $f(\frac{p-1}{2})=\frac{p^2-D}{4}\equiv 0 \pmod p$

若 $k>\frac{p-1}{2}$，則由 k 的定義知 $\frac{p^2-D}{4}$ 為質數

因此 $\frac{p^2-D}{4}=p$，得 $0>D=p^2-4p$，得 $p=3$，$D=-3$，則 $c=1$，矛盾

所以若 $b=0$，則 $k\le\frac{p-1}{2}<p$，得證。

現假設 $0<b<p$：

若 b 為偶數，則以 $p-x$ 取代 b，因此可假設 b 為奇數。

設 $b=2m+1$，$m\ge 0$

$D\equiv(2m+1)^2 \pmod p$

$f(m)=m^2+m+\frac{1-D}{4}=\frac{(2m+1)^2-D}{4}\equiv 0 \pmod p$

且 $f(p-1-m)\equiv f(m)\equiv 0 \pmod p$

由 $0<b<p$，知 $0\le m<\frac{p-1}{2}$，則 $f(m)<f(p-1-m)$

若 $p-1-m<k$，則由 k 的定義知 $f(p-1-m)=p$，得到 $f(p-1-m)=p=f(m)$，矛盾。

所以 $p-1\ge p-1-m\ge k$，得證。

三、【參考解答】

答案是$2\times 2013-2=4024$

底下證明 $|A|=r$ 的更一般情形。 設 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$, 其中 $a_i\in\mathrm{N}$ 且

$a_i+a_j\neq a_k$。

(1)構造

$$A=\{r-1,r,r+1,r+2,\cdots,2r-2\},$$

可證明符合條件。

(2)令 $a=\max A.$ 下面證明 $a\geq 2r-2.$

反證，設$a\leq 2r-3.$

1.若$a=2k<2r-3.$ 考慮以下 $k<r$組：

$$(1,2k-1),(2,2k-2),\cdots,(k-1,k+1),(k).$$

因為A中除了a之外還至少要選$k+1$數，因此至少有一個數對會被選到，此時兩數之和為$2k$，矛盾。

2 若$a=2k+1\leq 2r-3.$.考慮以下 k組：

$$(1,2k),(2,2k-1),\cdots,(k,k+1).$$

因為A除了a之外還要選$k+1$數，因此至少有一個數對會被選到，此時兩數之和為$2k+1$，矛盾。

因此$a=\max A\geq 2r-2.$

故由(1)(2) A中的最大數的最小值為 $2r-2.$原題為 $r=2013$的情形。