

101 學年度全國高中數學科能力競賽決賽

筆試試題 (二)

注意事項：

(1)時間分配：2 小時 (16:00 ~ 18:00)。

(2)配分：每題皆為 35 分。

(3)不可使用計算器。

一、在 $\triangle ABC$ 的三邊 \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} 上各有一點 D, E, F , 將 $\triangle ADF$, $\triangle BDE$, $\triangle CEF$ 的面積分別記為 x, y, z 。已知 $\triangle ABC$ 的面積為 1, 求 $xyz(x+y+z)$ 的最大值。

二、設 $f(x) = x^2 + x + c$, 其中 c 為質數。設 p 為奇質數且存在整數 b 使得 $b^2 + 4c - 1$ 能被 p 整除。若 k 是正整數且使得 $f(0), f(1), \dots, f(k-1)$ 均為質數, 證明 $k < c$ 且 $k < p$ 。

三、設 A 是由 2013 個正整數所組成的集合。已知 A 中任一個數都不是 A 中另外兩個相異數的和。令 M 表示 A 中的最大數, 求 M 的最小值。