

# 101 學年度全國高中數學科能力競賽決賽

## 筆試試題 (一)

注意事項：

- (1) 時間分配：2 小時 ( 13:30 ~ 15:30 )。
- (2) 配分：每題皆為 35 分。
- (3) 不可使用計算器。

---

一、設實數列  $a_1, a_2, \dots, a_7$  滿足  $\left| \sum_{k=1}^7 a_k \right| \leq \sqrt{7}$  且  $\left| \sum_{k=1}^7 \sqrt{k} a_k \right| \geq 14$ 。試證：  
其中至少有兩數  $a_p, a_q$  滿足  $|a_p - a_q| \geq \sqrt{2}$ 。

二、證明等式：

$$\sqrt[3]{\cos 40^\circ} + \sqrt[3]{\cos 80^\circ} - \sqrt[3]{\cos 20^\circ} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}(\sqrt[3]{9} - 2)}.$$

三、圓  $O$  上有一固定的弦  $\overline{AB}$ ，今有一圓  $O_1$  與  $\overline{AB}$  及圓  $O$  相切，切點分別為  $J$  與  $T$ 。

- (1) 設直線  $JT$  交圓  $O$  於一點  $M$  (異於  $T$  的點)，證明兩弧  $AM$  與  $BM$  相等。
- (2) 設另有一圓  $O_2$  與  $\overline{AB}$  及圓  $O$  相切且與圓  $O_1$  交於兩點  $P$  與  $Q$ ，證明直線  $PQ$  恆過某定點(不隨圓  $O_2$  而改變)。