101 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究（二）【參考解答】

一、【參考解答】

設 Δ 表示 ΔABC 的面積，則有

$$\Delta=\frac{1}{2}a\cdot d_a+\frac{1}{2}b\cdot d_b+\frac{1}{2}c\cdot d_c=\frac{abc}{4R}$$

因此得到

$$a\cdot d_a+b\cdot d_b+c\cdot d_c=2\Delta=\frac{abc}{2R}\quad\cdots\cdots\cdots(*)$$

現將 $\sqrt{d_a}+\sqrt{d_b}+\sqrt{d_c}$ 寫成

$$\sqrt{d_a}+\sqrt{d_b}+\sqrt{d_c}=\sqrt{a\cdot d_a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{b\cdot d_b}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}+\sqrt{c\cdot d_c}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}$$

利用柯西不等式及（*）式，可推得

$$\begin{aligned}
&\sqrt{d_a}+\sqrt{d_b}+\sqrt{d_c}\\
&=\sqrt{a\cdot d_a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{b\cdot d_b}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}+\sqrt{c\cdot d_c}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\\
&\le\left(a\cdot d_a+b\cdot d_b+c\cdot d_c\right)^{1/2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{1/2}\\
&=\left(\frac{abc}{2R}\right)^{1/2}\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right)^{1/2}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2R}}\left(ab+bc+ca\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

再應用一次柯西不等式得

$$\left(ab+bc+ca\right)^{1/2}\le\left[\left(a^2+b^2+c^2\right)^{1/2}\left(b^2+c^2+a^2\right)^{1/2}\right]^{1/2}$$

結合上述兩個不等式，則有

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{d_a}+\sqrt{d_b}+\sqrt{d_c}\\
&\le \frac{1}{\sqrt{2R}}\left(ab+bc+ca\right)^{1/2}\\
&\le \frac{1}{\sqrt{2R}}\left[\left(a^2+b^2+c^2\right)^{1/2}\left(b^2+c^2+a^2\right)^{1/2}\right]^{1/2}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2R}}\left(a^2+b^2+c^2\right)^{1/2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{2R}}
\end{aligned}
$$

故得證。當兩個不等式等號成立時有

$$
\begin{cases}
\sqrt{a\cdot d_a}\Big/\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\sqrt{b\cdot d_b}\Big/\dfrac{1}{\sqrt{b}}=\sqrt{c\cdot d_c}\Big/\dfrac{1}{\sqrt{c}}\Leftrightarrow a^2\cdot d_a=b^2\cdot d_b=c^2\cdot d_c\\
\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{a}\Leftrightarrow a=b=c
\end{cases}
$$

所以等號成立時有

$$
\begin{cases}
a=b=c\\
d_a=d_b=d_c
\end{cases}
$$

即 ΔABC 為正三角且 P 為內心。

二、【參考解答】

當 $p=2$ 時，$\sum_{k=0}^{2}C_k^2C_0^{2+k}(2-1)^{2-k}=C_0^2C_0^2+C_1^2C_1^3+C_2^2C_2^4=13$，除以 2^3 的餘數為 5。

當 p 為奇質數時，以下證明 $\sum_{k=0}^{p}C_k^pC_k^{p+k}(p-1)^{p-k}$ 除以 p^3 的餘數都是 1。

由二項式定理，可知：C_k^{p+k} 是 $(1+x)^{p+k}$ 的展開式中 x^p 項的係數，故 $\sum_{k=0}^{p}C_k^pC_k^{p+k}(p-1)^{p-k}$ 是 $\sum_{k=0}^{p}C_k^p(p-1)^{p-k}(1+x)^{p+k}$ 的展開式中 x^p 項的係數。又

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p}C_k^p(p-1)^{p-k}(1+x)^{p+k}&=(1+x)^p\sum_{k=0}^{p}C_k^p(1+x)^k(p-1)^{p-k}\\
&=(1+x)^p\left((1+x)+(p-1)\right)^p=(x+1)^p(x+p)^p\\
&=\sum_{i=0}^{p}C_i^px^i\cdot\sum_{j=0}^{p}C_j^pp^jx^{p-j}\text{。}
\end{aligned}
$$

上式的展開式中 x^p 項的係數為

$$\sum_{k=0}^{p}(C_k^p)^2 p^k = 1 + p^p + \sum_{k=1}^{p-1}(C_k^p)^2 p^k \text{ 。}$$

於是可得

$$\sum_{k=0}^{p}C_k^p C_k^{p+k}(p-1)^{p-k} = 1 + p^p + \sum_{k=1}^{p-1}(C_k^p)^2 p^k \text{ 。}$$

當 $k=1,\ 2,\ 3,\cdots,\ p-1$ 時，C_k^p 都 p 是的倍數；因此，$\sum_{k=1}^{p-1}(C_k^p)^2 p^k$ 的各項都是 p^3 的倍數，得知 $\sum_{k=1}^{p-1}(C_k^p)^2 p^k$ 是 p^3 的倍數。又 p^p 也是 p^3 的倍數，由此可知

$$\sum_{k=0}^{p}C_k^p C_k^{p+k}(p-1)^{p-k} \text{ 除以 } p^3 \text{ 的餘數為 } 1 \text{。}$$

由以上的討論可得：$\sum_{k=0}^{p}C_k^p C_k^{p+k}(p-1)^{p-k}$ 除以 p^3 的所有可能餘數為 1 或 5。

三、【參考解答】

觀察 $<a_n>$ 的前幾項：$1,\ 2,\ 8,\ 16,\ 20,\ 32,\ 62,\ 80,\ 100$，在第 $1,\ 4,\ 10$ 項出現 $1^2,\ 4^2,\ 10^2$，令 $<a_n>$ 在第 b_n 項出現第 n 個完全平方數，以下將證明：

$b_1=1,\ b_{n+1}=2b_n+2$ 且

$a_{b_n}={b_n}^2,\ a_{b_{n+1}}={b_n}^2+b_n,\ a_{b_n+k}={b_n}^2+b_n+(k-1)(2b_n+k+2),\ 2\le \mathrm{k}\le b_n+1$。

顯然 $b_1=1$ 且

$a_1=1^2,\ a_{b_1+1}=a_2=2=1^2+1,\ a_{b_1+2}=a_3=8=1^2+1+(2-1)(2\cdot 1+2+2), a_4=16$，得 $b_2=4=2b_1+2$，因此對於 $n=1$，上述關係式成立。假設 $n=m$ 時上述關係式成立，則

$$a_{2b_m+1}=a_{b_m+b_m+1}=b_m^2+b_m+b_m(3b_m+3)=(2b_m+1)^2-1<(2b_m+1)^2\text{，}$$

因此，

$$a_{2b_m+2}=a_{2b_m+1}+2(2b_m+1)+2=(2b_m+2)^2$$

因而得知 $b_{m+1}=2b_m+2$ 且 $a_{b_{m+1}+1}={b_{m+1}}^2$，進而有

$$a_{b_{m+1}+1}=a_{b_m+1}+b_{m+1}=b_{m+1}{}^2+b_{m+1}<\left(b_{m+1}+1\right)^2$$

再由此知

$$\begin{aligned}a_{b_{m+1}+2}&=a_{b_{m+1}+1}+2\left(b_{m+1}+1\right)+2\\&=b_{m+1}{}^2+b_{m+1}+\left(2-1\right)\left(2b_{m+1}+2+2\right)\end{aligned}$$

假設對於某個 $k,2\le k\le b_{m+1}+1$，

$$a_{b_{m+1}+k}=b_{m+1}{}^2+b_{m+1}+\left(k-1\right)\left(2b_{m+1}+k+2\right)$$

此時，

$$\begin{aligned}\left(b_{m+1}+k\right)^2-a_{b_{m+1}+k}&=\left(b_{m+1}+k\right)^2-b_{m+1}{}^2-b_{m+1}-\left(k-1\right)\left(2b_{m+1}+k+2\right)\\&=b_{m+1}-k+2>0\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}a_{b_{m+1}+k+1}&=a_{b_{m+1}+k}+2\left(b_{m+1}+k\right)+2\\&=b_{m+1}{}^2+b_{m+1}+\left(k+1-1\right)\left(2b_{m+1}+k+2\right)\end{aligned}$$

由數學歸納法得證！

因為　$b_1=1$, $b_{n+1}=2b_n+2$，因此

$$b_{n+1}+2=2\left(b_n+2\right)=2^2\left(b_{n-1}+2\right)=\cdots=2^n\left(b_1+2\right)=3\cdot 2^n$$

因此，$b_{n+1}=3\cdot 2^n-2$ 。

所以 $94=b_6<100<b_7=190$，事實上 $100=94+6=b_6+6$，

因此

$$\begin{aligned}a_{100}&=a_{b_6+6}\\&=b_6^2+b_6+\left(6-1\right)\left(2b_6+6+2\right)\\&=94^2+94+5\left(2\cdot 94+8\right)\\&=9910\end{aligned}$$