

101 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究試題 (二)

注意事項：

- (1) 三題中僅可以選兩題作答，並請註明題號。
- (2) 時間分配：2 小時 (10:10~12:10)。
- (3) 配分：每題皆為 7 分。
- (4) 不可使用計算器。

一、 設 $\triangle ABC$ 的三邊長為 a, b, c ，外接圓半徑為 R 。若 $\triangle ABC$ 內部一點 P 至三邊的距離分別為 d_a, d_b, d_c ，試證：

$$\sqrt{d_a} + \sqrt{d_b} + \sqrt{d_c} \leq \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{2R}}$$

並說明等號何時成立。

二、 設 p 為質數，試求 $\sum_{k=0}^p C_k^p C_k^{p+k} (p-1)^{p-k}$ 除以 p^3 的餘數。

三、 設 $\langle a_n \rangle$ 是一個數列。已知 $a_1 = 1$ 且對於 $n \geq 1$ ，

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + n & \text{若 } a_n \geq n^2 \\ a_n + 2n + 2 & \text{若 } a_n < n^2 \end{cases}$$

試求 a_{100} 。