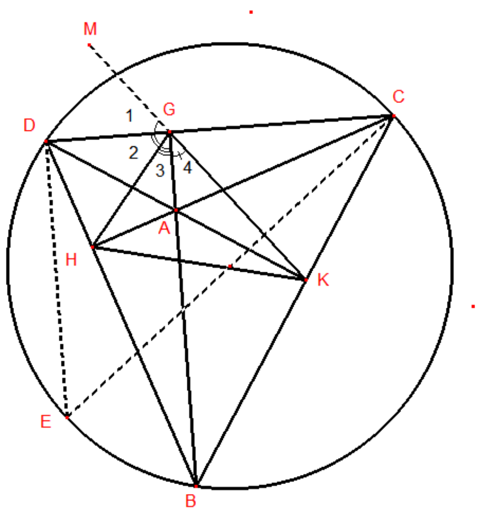
101 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究（一）【參考解答】

一、【參考解答】



設 ΔGHK 之內心 A，延長 $\overline{GK}$ 交 CD 於 M，設

$$\angle MGD=\angle 1,\ \angle DGH=\angle 2,\ \angle HGA=\angle 3,\ \angle \mathrm{KGA}=\angle 4$$

則因 $\angle 1=\angle 2, \angle 3$ 及 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180^\circ$，得

$$\angle 2+\angle 3=90^\circ,\ 即\ \overline{AG}\perp\overline{DC}。$$

同理可證 $\overline{AH}\perp\overline{DB}$, $\overline{AK}\perp\overline{BC}$。

作直徑 $\overline{CE}$，連接 $\overline{DE}$，則因 $\angle CDE=90^\circ$，$\overline{DE}\,||\,\overline{BA}$。

同理 $\overline{EB}\,||\,\overline{D}$。所以，四邊形 $ABED$ 為平行四邊行。因此 $\overline{AB}=\overline{DE}$。

故 $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{ED}^2+\overline{CD}^2=$ 。

二、【參考解答】

令 $P(x,\ \mathrm{y})$ 為瓢蟲從 $(1,\ 1)$ 前進到 $(x,\ \mathrm{y})$ 的路徑數。

1. 首先易知對於所有 $x\in\mathbb{N},\ P(x,\ 1)=1$。

2. 接著證明對於所有 $x\in\mathbb{N},\ P(x,\ 2)=2x$。

（a）易知 $P(1,\ 2)=P(1,\ 1)+P(2,\ 1)=2$。

（b）若已知 $P(n,\ 2)=2n$，則

$$P(n+1,\ 2)=P(n,\ 2)+P(n+1,\ 1)+P(n+2,\ 1)=2(n+1)$$

故由數學歸納法得證。

3. 接著再證明對於所有 $x\in\mathbb{N},\ P(x,\ 3)=2x(x+2)$。

（a）易知 $P(1,\ 3)=P(1,\ 2)+P(2,\ 2)=2+4=6=2\times1\times3$。

（b）若已知 $P(n,\ 3)=2n(n+2)$，則

$$\begin{aligned}P(n+1,\ 3)&=P(n,\ 3)+P(n+1,\ 2)+P(n+2,\ 2)\\&=2n(n+2)+2(n+1)+2(n+2)\\&=2(n+1)(n+1+2)\end{aligned}$$

故由數學歸納法得證。

4. 最後證明對於所有 $x\in\mathbb{N},\ P(x,\ 4)=\dfrac{2}{3}x\left(2(x+3)^2+1\right)$。

（a）易知 $P(1,\ 4)=P(1,\ 3)+P(2,\ 3)=6+16=22=\dfrac{2}{3}\times\left(2\times4^2+1\right)$。

（b）若已知 $P(n,\ 3)=\dfrac{2}{3}n\left(2(n+3)^2+1\right)$，則

$$\begin{aligned}P(n+1,\ 4)&=P(n,\ 4)+P(n+1,\ 3)+P(n+2,\ 3)\\&=\frac{2}{3}n\left(2(n+3)^2+1\right)+2(n+1)(n+3)+2(n+2)(n+4)\\&=\frac{2}{3}(n+1)\left(2(x+4)^2+1\right)\end{aligned}$$

故由數學歸納法得證。因此

$$\begin{aligned}P(101,\ 4)&=\frac{2}{3}\times 101\times\left(2\times(101+3)^2+1\right)\\&=1456622\end{aligned}$$

三、【參考解答】

利用 $cd=\dfrac{1}{ab}, da=\dfrac{1}{bc}$ ，所以

$$A=\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+cd}{1+c}+\frac{1+da}{1+d}=\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ab}{ab+abc}+\frac{1+bc}{bc+bcd}$$

$$=(1+ab)\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{ab+abc}\right)+(1+bc)\left(\frac{1}{1+b}+\frac{1}{bc+bcd}\right).$$

利用算幾不等式：$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{4}{x+y}$ ，其中 x, y 為正數，因此

$$A\geq(1+ab)\left(\frac{4}{1+a+ab+abc}\right)+(1+bc)\left(\frac{4}{1+b+bc+bcd}\right)$$

$$=4\left(\frac{1+ab}{1+a+ab+abc}+\frac{1+bc}{1+b+bc+bcd}\right)=4\left(\frac{1+ab}{1+a+ab+abc}+\frac{a(1+bc)}{a(1+b+bc+bcd)}\right)=4$$

故得證。