

101 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究試題 (一)

注意事項：

- (1) 三題中僅可以選兩題作答，並請註明題號。
- (2) 時間分配：2 小時 (8:00~10:00)。
- (3) 配分：每題皆為 7 分。
- (4) 不可使用計算器。

一、設三角形的內心為 A ，三個旁心（兩外角平分線及一內角平分線之交點）分別為 B, C, D 。若 \overline{CE} 為 $\triangle BCD$ 之外接圓的直徑，求證

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{CE}^2。$$

二、有一隻瓢蟲在座標平面上的第一象限 $\{(x, y) | x > 0, y > 0\}$ 內依據以下三種方式移動：

- (1) 從 (x, y) 前進到 $(x+1, y)$ ；
- (2) 從 (x, y) 前進到 $(x-1, y+1)$ ；
- (3) 從 (x, y) 前進到 $(x, y+1)$ 。

求此瓢蟲從 $(1, 1)$ 移動到 $(101, 4)$ 的所有路徑數。

三、已知 a, b, c, d 為正數，且滿足 $abcd = 1$ ，試證：

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+cd}{1+c} + \frac{1+da}{1+d} \geq 4。$$