# 100學年度高級中學數學能力競賽決賽

## 筆試試題（二）參考解答

**注意事項：**

（1）時間：2 小時（16:00～18:00）

（2）配分：每題皆為 35 分

（3）不可使用計算器

（4）請將答案依序寫在答案卷內

---

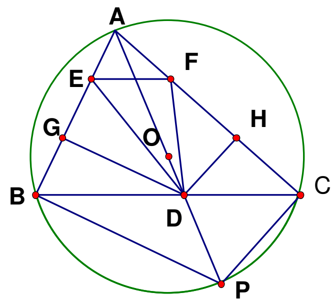
一、設 $O$ 為銳角 $\Delta ABC$ 外接圓的圓心，直線 $\overleftrightarrow{AO}$ 交 $\overline{BC}$ 邊於一點 $D$，分別在邊 $\overline{AB}$ 及 $\overline{AC}$ 上各取一點 $E,F$，使得 $\overline{ED}=\overline{BD}$ 及 $\overline{DF}=\overline{CD}$，試證：$\overline{EF}\,//\,\overline{BC}$。

【參考解答】：

1.如圖，自 $D$ 點分別作邊 $\overline{BE}$ 及 $\overline{CF}$ 的高，分別交 $\overline{BE}$ 及 $\overline{CF}$ 於點 $G$ 及 $H$，

作直線 $\overleftrightarrow{AO}$ 交圓 $O$ 於 $P$，所以 $\overline{AP}$ 為圓 $O$ 的直徑，因此

$\angle ABP = 90° = \angle ACP$。




2.因為 $\Delta AGD \sim \Delta ABP$ 及 $\Delta AHD \sim \Delta ACP$，所以 $\dfrac{\overline{AG}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AP}}=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AC}}$，

因此 $\Delta AGH \sim \Delta ABC$，

故 $\overline{GH}\,//\,\overline{BC}$。

3.因為 $\overline{ED}=\overline{BD}$ 及 $\overline{DF}=\overline{CD}$，所以 $\overline{BG}=\overline{GE}$ 及 $\overline{CH}=\overline{HF}$。連 $\overline{CE}$ 交 $\overline{GH}$ 於 $M$ 點，因 $\overline{GH}\,//\,\overline{BC}$，所以 $\overline{GM}\,//\,\overline{BC}$，則 $\overline{EM}=\overline{MC}$，又 $\overline{CH}=\overline{HF}$，故 $\overline{EF}\,//\,\overline{MH}$，

因此 $\overline{EF}\,//\,\overline{BC}$。

二、設 $f(x)$ 為首項係數等於 1 的四次實係數多項式。假設

$f(\alpha)=f(\beta)=0\ \ (\alpha\neq\beta)$，但對所有其他的實數 $\gamma\,(\gamma\neq\alpha,\beta)$，恆有 $f(\gamma)>0$。

試證：若 $\alpha \le x \le \beta$ 且 $x \ne \frac{\alpha+\beta}{2}$ ，則 $f(x) < f(\frac{\alpha+\beta}{2})$ 。

【參考解答】:

證：不失一般性，可假設 $\alpha < \beta$ 。表 $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x^2+bx+c)$ 。

(1) 若 $b^2-4c<0$ ，則 $x^2+bx+c$ 恆正；當 $\alpha<\gamma<\beta$ 時，

$f(\gamma)=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma^2+b\gamma+c)<0$ ，矛盾。

(2) 若 $b^2-4c \ge 0$ ，則 $x^2+bx+c=0$ 有實數解。故 $x^2+bx+c=(x-\alpha)^2$ 或 $(x-\beta)^2$ 或 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 。若 $x^2+bx+c=(x-\alpha)^2$ ，則 $f(x)=(x-\alpha)^3(x-\beta)$ ；當 $\alpha<\gamma<\beta$ 時，

$f(\gamma)=(\gamma-\alpha)^3(\gamma-\beta)<0$ ，矛盾。同理， $x^2+bx+c=(x-\beta)^2$ 的情況亦不會發生。

故 $x^2+bx+c=(x-\alpha)(x-\beta)$ 。因此 $f(x)=((x-\alpha)(x-\beta))^2$ 。

當 $\alpha \le x \le \beta$ 時，由算幾不等式得 $\frac{(x-\alpha)+(\beta-x)}{2} \ge \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}$ ，即

$\frac{\beta-\alpha}{2} \ge \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}$ 。因 $f(\frac{\alpha+\beta}{2})=(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha)^2(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta)^2=(\frac{\beta-\alpha}{2})^4$ ，故

$f(\frac{\alpha+\beta}{2}) \ge (x-\alpha)^2(\beta-x)^2 = f(x)$，其中等號成立的充要條件爲 $x-\alpha=\beta-x$，即 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ 。

三、已知有身高都不一樣的 $n$ 個人( $n\ge2$ )，將這 $n$ 個人排成一排，而且任選 3 個人，如果這 3 個人之中身高第二高的人所站的位置在最矮的人所站的位置之前時，則這 3 個人之中身高最高的人所站的位置必須介於另外兩個人所站位置之間的某個位置，請問滿足上述條件的排列方法共有幾種？

【參考解答】:

**引理** 滿足條件的排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 中至多有一個 descent.

( $i$ 是 descent 的意思是指 $a_i > a_{i+1}$ )

解: 如果 $i, j$ 都是 descent( $i \ne j$ )

(i) $a_i > a_j$ 取 $a_i, a_j, a_{j+1}$ 這 3 個人的身高是 $a_i > a_j > a_{j+1}$ 所以不滿足條件

(ii) $a_i < a_j$ 取 $a_i, a_{i+1}, a_j$ 這 3 個人的身高是 $a_j > a_i > a_{i+1}$ 所以不滿足條件 。

解 $1+\binom{n}{2}$

令這 $n$ 個人身高從矮到高編號爲 $1,2,3,\cdots,n$

當 $n=3$ 時有 4 種排法

$123,132,231,312$

假設 $n=k$ 時排法共有 $1+\binom{k}{2}$ 種

當 $n=k+1$ 時

先將 $1,2,3,\cdots,k$ 先排好，令爲 $a_1a_2\cdots a_k$ 滿足條件，由引理知它最多有 1 個 descent.

(i) $a_1a_2\cdots a_k$ 沒有 descent 則 $k+1$ 可以放入任何位置，所以有 $k+1$ 種排法。

(ii) $a_1a_2\cdots a_k$ 有一個 descent 令其爲 $i$，則 $k+1$ 必須放在 $a_i$ 及 $a_{i+1}$ 之間，所以只有唯一放法，總共有 $k+1+\binom{k}{2}=1+\binom{k+1}{2}$。

由數學歸納法得知有 $1+\binom{n}{2}$ 種排法。