100學年度高級中學數學能力競賽決賽

獨立研究試題（二）參考解答

注意事項：

（1）三題中自選兩題作答，並請註明題號

（2）時間：2 小時（10:10～12:10）

（3）配分：每題皆為 7 分

（4）不可使用計算器

（5）請將答案寫在答案卷內

一、設 $a,\ k$ 是正整數，$a\ge 2$，證明：存在一個正整數 n，使得 a^n 和 a^k-k+1 除以 a^k+1 有相同的餘數之充分必要條件為存在整數 $r\ge 0$，使得 $k=a^r$。

【參考解答】

證：假設 $k=a^r$，$r\ge 0$

由 $a^k\equiv -1 (\bmod\ a^k+1)$

得 $a^r\cdot a^k\equiv -a^r (\bmod\ a^k+1)$

即 $a^{r+k}\equiv -k (\bmod\ a^k+1)$

設 $n=r+k$，則 $a^n=a^{r+k}\equiv -k\equiv a^k+1-k (\bmod\ a^k+1)$

反之，假設存在正整數 n，使得 a^n 和 a^k-k+1 除以 a^k+1 有相同的餘數，

則 $a^n\equiv a^k-k+1\equiv -k (\bmod\ a^k+1)$

令 $n=qk+r$，其中 q,r 是非負整數且 $0\le r<k$

則 $a^n=a^{qk+r}\equiv (-1)^q\cdot a^r\equiv \pm a^r (\bmod\ a^k+1)$

得 $k\equiv \mp a^r (\bmod\ a^k+1)$

若 $k=a^r (\bmod\ a^k+1)$，由 $1\le k$，$a^r\le a^k$，則 $k=a^r$

若 $k=-a^r (\bmod\ a^k+1)$，則 $k=a^k-a^r+1$

但 $a^k=a\cdot a^{k-1}\ge 2a^{k-1}\ge a^r+a^{k-1}>a^r+k-1$

則 $k<a^k-a^r+1$，矛盾

因此，$k=a^r$

二、設 a,b,c 為實數，若 a,b,c 的某一種排列形成算術數列（即等差數列），則稱 $\{a,b,c\}$ 為算術組合。證明任意五個相異數 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 中必存在一種排列，使得任何相鄰的三個數皆不為算術組合。（例如數列 $7,2,6,4,1$ 中的 $\{7,2,6\}$，$\{6,4,1\}$ 皆不為算術組合，但 $\{2,6,4\}$ 是算術組合）。

【參考解答】

設 5 個數由小到大排列為 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5。

Case 1. $\{a_2,a_3,a_4\}$不是算術組合。

若$\{a_1,a_2,a_3\}$是算術組合，則a_5,a_1,a_2,a_4,a_3滿足所求。事實上，$\{a_5,a_1,a_2\}$和$\{a_1,a_2,a_4\}$皆不為算術組合。

同理，若$\{a_3,a_4,a_5\}$為算術組合，則a_3,a_2,a_4,a_5,a_1符合所求。

最後，若$\{a_1,a_2,a_3\}$和$\{a_3,a_4,a_5\}$皆不為算術組合，則a_1,a_2,a_3,a_4,a_5符合所求。

Case 2. $\{a_2,a_3,a_4\}$是算術組合.

若$\{a_1,a_2,a_3\}$是算術組合，則a_4,a_1,a_2,a_5,a_3符合所求。

同理，若$\{a_3,a_4,a_5\}$是算術組合，則a_2,a_5,a_4,a_1,a_3符合所求。

最後，若$\{a_1,a_2,a_3\}$和$\{a_3,a_4,a_5\}$皆不為算術組合，則a_2,a_1,a_3,a_4,a_5符合所求。

綜合以上討論知：存在一種排列滿足所求。

三、

(1) 試找出一組實數 a, b 使得

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\le\frac{a^3+b^3}{2}$$

不成立 。

(2) 證明: 對於任意實數 a, b, 下列不等式**恆**成立:

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2}\cdot\frac{a^6+b^6}{2}\le\frac{a^{10}+b^{10}}{2}$$ 。

【參考解答】

(1)

a, b 爲任意實數, m, n 爲奇偶性相同的自然數, 下列不等式成立:

$$\frac{a^m+b^m}{2}\cdot\frac{a^n+b^n}{2}\le\frac{a^{m+n}+b^{m+n}}{2}$$

$$0\le 2(a^{m+n}+b^{m+n})-(a^m+b^m)(a^n+b^n)$$

$$0\le (a^m-b^m)(a^n-b^n)$$

(a) m,n 同爲奇數

若 $a \geq b$，則 $a^m \geq b^m, a^n \geq b^n \Rightarrow 0 \leq (a^m - b^m)(a^n - b^n)$

若 $a < b$，則 $a^m < b^m, a^n < b^n \Rightarrow 0 \leq (a^m - b^m)(a^n - b^n)$

(b) m,n 同爲偶數，考慮 m=2s, n=2t

若 $a^2 \geq b^2$，則 $(a^2)^s \geq (b^2)^s, (a^2)^t \geq (b^2)^t \Rightarrow$

$a^m \geq b^m, a^n \geq b^n \Rightarrow 0 \leq (a^m - b^m)(a^n - b^n)$

若 $a^2 < b^2$，則 $(a^2)^s < (b^2)^s, (a^2)^t < (b^2)^t \Rightarrow$

$a^m < b^m, a^n < b^n \Rightarrow 0 \leq (a^m - b^m)(a^n - b^n)$

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \leq \frac{a^4+b^4}{2}, \quad \frac{a^4+b^4}{2} \cdot \frac{a^6+b^6}{2} \leq \frac{a^{10}+b^{10}}{2}$$

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \cdot \frac{a^6+b^6}{2} \leq \frac{a^{10}+b^{10}}{2}$$

(2) a=1, b= -3

$$\frac{1+(-3)}{2} \cdot \frac{1^2+(-3)^2}{2} = -5 > \frac{1^3+(-3)^3}{2} = -13$$