

100學年度高級中學數學能力競賽決賽

獨立研究試題（二）

注意事項：

- (1) 三題中自選兩題作答，並請註明題號
 - (2) 時間：2 小時（10:10~12:10）
 - (3) 配分：每題皆為 7 分
 - (4) 不可使用計算器
 - (5) 請將答案寫在答案卷內
-

一、設 a, k 是正整數， $a \geq 2$ ，證明：存在一個正整數 n ，使得 a^n 和 $a^k - k + 1$ 除以 $a^k + 1$ 有相同的餘數之充分必要條件為存在整數 $r \geq 0$ ，使得 $k = a^r$ 。

二、設 a, b, c 為實數，若 a, b, c 的某一種排列形成算術數列（即等差數列），則稱 $\{a, b, c\}$ 為算術組合。證明任意五個相異數 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 中必存在一種排列，使得任何相鄰的三個數皆不為算術組合。（例如數列 7, 2, 6, 4, 1 中的 $\{7, 2, 6\}$ ， $\{6, 4, 1\}$ 皆不為算術組合，但 $\{2, 6, 4\}$ 是算術組合）。

三、

(1) 試找出一組實數 a, b 使得

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \leq \frac{a^3+b^3}{2}$$

不成立。

(2) 證明：對於任意實數 a, b ，下列不等式恆成立：

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \cdot \frac{a^6+b^6}{2} \leq \frac{a^{10}+b^{10}}{2}。$$