100學年度高級中學數學能力競賽決賽

獨立研究試題（一）參考解答

注意事項：

(1) 三題中自選兩題作答，並請註明題號。
(2) 時間：2 小時（8:00～10:00）
(3) 配分：每題皆為 7 分
(4) 不可使用計算器，請將答案寫在答案卷內。

一、設 $a,\ b$ 為正整數，試求滿足

$$4\times 13^{a}-25\times 3^{b}=1$$

的所有序對 (a,b)。

【參考解答】：

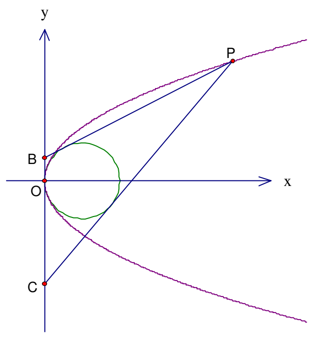
若 (a,b) 滿足 $4(13^{a})-25(3^{b})=1$，則 $4(13^{a})-1$ 爲 5 的倍數。因 $4(13^{a})-1=(5-1)(10+3)^{a}-1$，故 $3^{a}+1$ 爲 5 的倍數。對於一般的整數 c，表 $r(c)$ 爲 3^{c} 除以 5 所得的餘數，則 $r(0)=1,\ r(1)=3,\ r(2)=4,\ r(3)=2,\ r(4)=1$；若 k 爲非負的整數，則 $r(c+4k)=r(c)$。因此 $a=2+4k$，其中 k 爲某一非負的整數，從而得 $25(3^{b})=4(13^{a})-1=4(13^{2+4k})-1=26^{2}13^{4k}-1=(26*13^{2k}+1)(26*13^{2k}-1)$.

因 $26*13^{2k}+1$ 與 $26*13^{2k}-1$ 互質，得 $26*13^{2k}\pm 1=3^{b}$，$26*13^{2k}\mp 1=25$。但 $26*13^{2k}-1$ 除以 3 的餘數爲 1，不合，故 $26*13^{2k}+1=3^{b}$，$26*13^{2k}-1=25$。由此解出 $k=0$，$a=2$，$b=3$。最後檢驗 $4(13^{2})-25(3^{3})=676-675=1$，故 $(a,b)=(2,3)$ 爲所求。

二、如下圖，P 是抛物線 $y^{2}=2x$ 上的動點，點 B、C 在 y 軸上，

圓 $(x-1)^{2}+y^{2}=1$ 內切於ΔPBC，試求ΔPBC 面積的最小值。

【參考解答】：設 p 的坐標爲(α,β),B 的坐標爲(0,b),C 的坐標爲(0,c),並設 b>c,



直線 PB 方程式爲 $y-b=\dfrac{\beta-b}{\alpha}(x-0)$

$\Rightarrow (\beta-b)x-\alpha y+\alpha b=0$ .....(1)

直線 PC 方程式爲 $y-c=\dfrac{\beta-c}{\alpha}(x-0)$

$\Rightarrow (\beta-c)x-\alpha y+\alpha c=0$ ......(2)

因圓心(1,0)到直線 PB 的距離爲 1,由(1)而有

$$\frac{|\beta-b+\alpha b|}{\sqrt{(\beta-b)^{2}+\alpha^{2}}}=1$$

$\Rightarrow (\beta-b)^2+\alpha^2=(\beta-b)^2+2\alpha b(\beta-b)+\alpha^2b^2$,由於 α>2,上式可簡化爲

$$(\alpha-2)b^2+2\beta b-\alpha=0$$

同理由(2)可得 $\quad (\alpha-2)c^2+2\beta c-\alpha=0$

於是, $b+c=\dfrac{-2\beta}{\alpha-2},bc=\dfrac{-\alpha}{\alpha-2} \quad \Rightarrow (b-c)^2=\dfrac{4\alpha^2+4\beta^2-8\alpha}{(\alpha-2)^2}$

因爲 $P(\alpha,\beta)$ 在拋物線上,所以 $\beta^2=2\alpha \quad \Rightarrow (b-c)^2=\dfrac{4\alpha^2}{(\alpha-2)^2} \Rightarrow b-c=\dfrac{2\alpha}{\alpha-2}$

故 ΔPBC 的面積 $S=\dfrac{1}{2}(b-c)\alpha=\dfrac{\alpha}{\alpha-2}\times\alpha=\dfrac{\alpha^2}{\alpha-2} \quad \Rightarrow \alpha^2-S\alpha+2S=0$

由判別式 $S^2-8S\ge 0 \Rightarrow S\ge 8$;求得 ΔPBC 面積的最小值爲 8.

三、由 0,1 排成長度 n 的字串，稱為**二元 n 字串**。若一個二元 n 字串中出現字串 00 與 11 的個數一樣多，則稱為**長度 n 的二元平衡字串**，例如：長度 5 的二元平衡字串共有以下 6 種：10101,01010,01100,10011,00110,11001。（11000 不是二元平衡字串，因為有一組 11，有 2 組 00）。若以 a_n 表示長度 n 的二元平衡字串之個數，則已經知道 $a_1=a_2=a_3=2,a_4=4,a_5=6$ 。

（1）試列出所有長度 6 的二元平衡字串，並求 a_6 之值。

（2）試求 a_n 的一般公式。

【參考解答】

(1) 長度 6 的二元平衡字串共有以下 12 種：

101010,010101,110100,001011,101100,010011

011001,100110,001101,110010,111000,000111

故 $a_6=12$ 。

(2) 顯然， $a_1=2,a_2=2$ 。以下證明： $a_n=2C^{n-2}_{\lceil \frac{n}{2}\rceil-1}\ (n=3,4,5,\cdots)$ 。

對長度 n 的平衡二元字串 $x_1x_2\cdots x_n$ ，設其中出現 0 的有 ℓ 組，而第 i 組 0 的個數爲 p_i（$i=1,2,\cdots,\ell$），出現 1 的有 m 組，而第 j 組 1 的個數爲 q_j（$j=1,2,\cdots,m$）。則由已知條件，可得

$$\sum_{i=1}^{\ell}(p_i-1)=\sum_{j=1}^{m}(q_j-1),$$

若令 $p=\sum_{i=1}^{\ell}p_i, q=\sum_{j=1}^{m}q_j$ ，則可推得 $p-q=\ell-m$。

(i) 當 $x_1\ne x_n$ 時 (例如：00011011)， $\ell=m$ ，即 $p=q$ ，此時 n 爲偶數。

(ii) 當 $x_1 = x_n = 0$ 時（例如：000110110），$\ell = m+1$，即 $p = q+1$，此時 n 爲奇數。

(iii) 當 $x_1 = x_n = 1$ 時（例如：100011011），$\ell = m-1$，即 $p = q-1$，此時 n 爲奇數。

因此，當 n 爲偶數時，$(x_1, x_n) = (0,1)$ 或 $(1,0)$，而在其餘 $x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}$ 的 $n-2$ 個位置就得排 $\dfrac{n-2}{2}$ 個 0 及 $\dfrac{n-2}{2}$ 個 1，此排法有 $C^{n-2}_{\frac{n-2}{2}}$ 種；故當 n 爲偶數時，有 $2C^{n-2}_{\frac{n-2}{2}} = 2C^{n-2}_{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1}$ 種排法。

當 n 爲奇數時，若 $(x_1, x_n) = (0,0)$，則在其餘 $x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}$ 的 $n-2$ 個位置就得排 $\dfrac{n-3}{2}$ 個 0 及 $\dfrac{n-1}{2}$ 個 1，此排法有 $C^{n-2}_{\frac{n-3}{2}}$ 種。若 $(x_1, x_n) = (1,1)$，則在其餘 $x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}$ 的 $n-2$ 個位置就得排 $\dfrac{n-1}{2}$ 個 0 及 $\dfrac{n-3}{2}$ 個 1，此排法有 $C^{n-2}_{\frac{n-1}{2}}$ 種。故當 n 爲奇數時，也有 $C^{n-2}_{\frac{n-1}{2}} + C^{n-2}_{\frac{n-3}{2}} = 2C^{n-2}_{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1}$ 種排法。

因此，$a_n = \begin{cases} 2, & \text{當 } n=1 \\ 2, & \text{當 } n=2 \\ 2C^{n-2}_{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1}, & \text{當 } n \geq 3 \end{cases}$。