

100學年度高級中學數學能力競賽決賽

獨立研究試題（一）

注意事項：

- (1) 三題中自選兩題作答，並請註明題號。
 - (2) 時間：2 小時（8:00~10:00）
 - (3) 配分：每題皆為 7 分
 - (4) 不可使用計算器，請將答案寫在答案卷內。
-

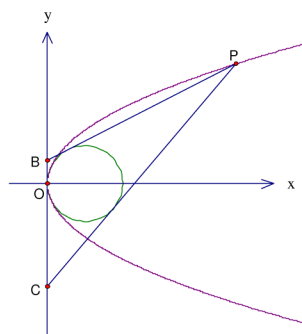
一、設 a, b 為正整數，試求滿足

$$4 \times 13^a - 25 \times 3^b = 1$$

的所有序對 (a, b) 。

二、如下圖， P 是拋物線 $y^2 = 2x$ 上的動點，點 B, C 在 y 軸上，

圓 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 內切於 $\triangle PBC$ ，試求 $\triangle PBC$ 面積的最小值。



三、由 0,1 排成長度 n 的字串，稱為二元 n 字串。若一個二元 n 字串中出現字串 00 與 11 的個數一樣多，則稱為長度 n 的二元平衡字串，例如：長度 5 的二元平衡字串共有以下 6 種：10101, 01010, 01100, 10011, 00110, 11001。（11000 不是二元平衡字串，因為有一組 11，有 2 組 00）。若以 a_n 表示長度 n 的二元平衡字串之個數，則已經知道 $a_1 = a_2 = a_3 = 2, a_4 = 4, a_5 = 6$ 。

- (1) 試列出所有長度 6 的二元平衡字串，並求 a_6 之值。
- (2) 試求 a_n 的一般公式。