100學年度高級中學數學能力競賽決賽

口 試 試 題 參考解答

注意事項：

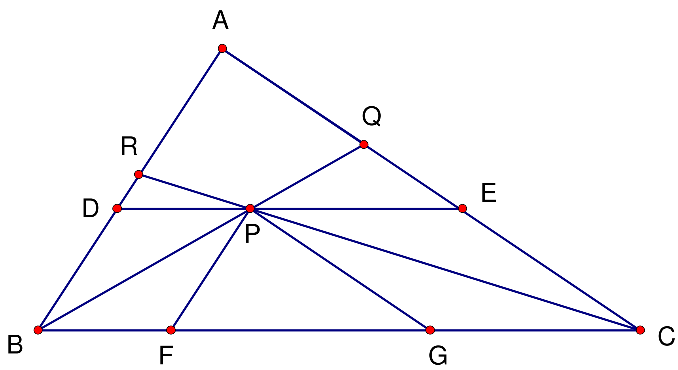
(1) 試卷共 2 題，參賽者可先在本試卷上作答，思考時間 20 分鐘；

(2) 攜帶本試卷到口試 A 組應試，答辯時間 20 分鐘，並繳回本試卷；

(3) 口試 A 組答辯結束後，到口試 B 組繼續應試，答辯時間 20 分鐘。

一、ΔABC 中 D、E 兩點分別為兩邊 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 上的點，使得 $\overline{DE} // \overline{BC}$，又 P 點為線段 $\overline{DE}$ 上任意一點，使得直線 CP 交線段 AB 於 R 點，直線 BP 交線段 AC 於 Q 點。試證 $\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{CQ}}+\dfrac{\overline{AR}}{\overline{BR}}$ 之值必為一定數，並求此定數。

【參考解答】(一)：



F, G 兩點在線段 BC 上，滿足

線段 PF//線段 AB, 線段 PG//線段 AC，

PF = DB, PG = EC.

設 $\overline{AB} = k\ \overline{BD}$，因 DE // BC，

所以 $\overline{AC} = k\ \overline{EC}$。

$\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{CQ}}=\dfrac{\overline{AC}-\overline{CQ}}{\overline{CQ}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CQ}}-1$，同理，$\dfrac{\overline{AR}}{\overline{BR}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BR}}-1$。

由 ΔBCQ 相似於 ΔBGP，得 $\dfrac{\overline{PG}}{\overline{CQ}}=\dfrac{\overline{BG}}{\overline{BC}}$。

$\dfrac{\overline{BG}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{PG}}{\overline{CQ}}=\dfrac{\overline{EC}}{\overline{CQ}}=\dfrac{\frac{1}{k}\overline{AC}}{\overline{CQ}}=\dfrac{\overline{AC}}{k\,\overline{CQ}}$。

同理，$\dfrac{\overline{CF}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{PF}}{\overline{BR}}=\dfrac{\overline{AB}}{k\,\overline{BR}}$。

由 ΔABC 相似於 ΔPFG、PF = DB 及 $\overline{AB} = k\ \overline{BD}$，可得 $\overline{BC} = k\ \overline{FG}$。

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{CF}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BC}+\overline{FG}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BC}+\frac{1}{k}\overline{BC}}{\overline{BC}}=1+\frac{1}{k}$$ 。

又 $\frac{\overline{BG}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{CF}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AC}}{k\,\overline{CQ}}+\frac{\overline{AB}}{k\,\overline{BR}}=1+\frac{1}{k}$

因此，$\frac{\overline{AC}}{\overline{CQ}}+\frac{\overline{AB}}{\overline{BR}}=k+1$

又 $\frac{\overline{AQ}}{\overline{CQ}}+\frac{\overline{AR}}{\overline{BR}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CQ}}+\frac{\overline{AB}}{\overline{BR}}-2=k+1-2=k-1$ 。

【參考解答】(二)

作 $\overline{AP}$ 交 BC 於點 T ，利用商氏定理

$\frac{AR}{BR}\bullet\frac{BC}{CT}\bullet\frac{TP}{AP}=1$ (看 $\triangle ABT$)

$\frac{AQ}{CQ}\bullet\frac{BC}{BT}\bullet\frac{TP}{AP}=1$ (看 $\triangle ACT$)

所以(看 $\frac{AR}{BR}+\frac{AQ}{CQ}=\frac{AP}{BC}(\frac{CT+BT}{TP})=\frac{AP}{TP}=\frac{AD}{BD}$)

【參考解答】(三)

過 $\overline{AP}$ 交 BC 於點 T

$\frac{AR}{BR}=\frac{\triangle APB}{\triangle BPC},\frac{AQ}{CQ}=\frac{\triangle ACP}{\triangle BPC}$

所以 $\frac{AR}{BR}+\frac{AQ}{CQ}=\frac{\triangle APB+\triangle APC}{\triangle BPC}=\frac{AP}{TP}=\frac{AD}{BD}$

二、設方陣 $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&2&0\\-2&1&3\end{bmatrix}$，試求最小的正整數 n，使得方陣 A^n 之任一非 0 之元素 a_n ，恆有 $\log_2|a_n|>100$ 。

【參考解答】：依自乘數次可發現(並用數學歸納法證之)

$$A^n = \begin{bmatrix} -(2^n-2) & 2^n-1 & 2^n-1 \\ 0 & 2^n & 0 \\ -(2^{n+1}-2) & 2^n-1 & 2^{n+1}-1 \end{bmatrix} \quad n \geq 1$$

非 0 元的絕對值$|a_n|$最小爲2^n-2

可令$\log_2|2^n-2|>100$

故　$2^n-2>2^{100}$

　　$2^n>2^{100}+2$

n 之最小正整數爲 101

注：本題重點在求方陣A^n之規律