

2016年7月11日，星期一

問題 1. 三角形 BCF 中， $\angle B$ 是直角。設點 A 在直線 CF 上，滿足 $FA = FB$ 、且 F 位於 A 和 C 之間。選取點 D 使得 $DA = DC$ 、且 AC 是 $\angle DAB$ 的角平分線。再選點 E 使得 $EA = ED$ 、且 AD 是 $\angle EAC$ 的角平分線。設點 M 為 CF 的中點，另有一點 X 滿足 $AMXE$ 為平行四邊形 (其中 $AM \parallel EX$ 、 $AE \parallel MX$)。

證明：直線 BD 、 FX 、 ME 三線共點。

問題 2. 找出所有的正整數 n ，使得我們可以在 $n \times n$ 表格的每一方格中各填入字母 I 、 M 、 O 其中之一，並且符合下列條件：

- 在任一行及任一列中，有三分之一的方格填入字母 I 、三分之一的方格填入 M 、三分之一的方格填入 O ；並且
- 對任一條對角線而言，如果它的格子數是三的倍數，則在該對角線中有三分之一的方格填入字母 I 、三分之一的方格填入 M 、三分之一的方格填入 O 。

註：一個 $n \times n$ 表格的各行各列，可以按自然順序用 1 至 n 標號。由此，任一方格可對應到一組正整數 (i, j) ，其中 $1 \leq i, j \leq n$ 。當 $n > 1$ 時，表格會有 $4n - 2$ 條**對角線**，分成兩類：第一類對角線係由 $i + j$ 為定值的所有方格 (i, j) 所組成；而第二類是由 $i - j$ 為定值的所有方格 (i, j) 所組成。

問題 3. 設 $P = A_1A_2 \dots A_k$ 為平面上的凸多邊形。頂點 A_1, A_2, \dots, A_k 坐標中的所有數字都是整數，並且都落在一個圓上。令 P 的面積為 S 。給一個正奇數 n ，使得 P 的每一條邊之長度平方皆為整數，並且可被 n 整除。

證明： $2S$ 為整數，並且可被 n 整除。

2016 年 7 月 12 日，星期二

問題 4. 對一個由正整數所組成的集合而言，如果它至少包含兩個元素，且每一個元素至少與另一個元素有共同的質因數，則稱此集合為一個**芳香集**。設 $P(n) = n^2 + n + 1$ 。請找出最小的正整數 b ，使得我們可以找到非負整數 a ，讓集合

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

成為一個芳香集。

問題 5. 黑板上寫著方程式

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016),$$

其中等號兩邊各有 2016 個一次因式。請找出最小的正整數 k ，使得：在這 4032 個一次因式中，我們能夠恰好擦掉 k 個，讓等號兩邊至少各留下一個一次因式，且所得到的方程式沒有實數解。

問題 6. 平面上有 $n \geq 2$ 條線段，其中任兩條線段都交叉，並且任三條線段不共點。小杰要對每條線段各選一個端點放一隻青蛙，並且讓青蛙面對另一個端點。然後他會拍 $n-1$ 次手；他每拍一次手，每隻青蛙都馬上向前跳到它所在的線段上的下一個交點。青蛙永遠不改變它前進的方向。小杰的願望是存在某種擺放青蛙的方法，使得任意兩隻青蛙總是不會同時停在同一個交點上。

- (a) 證明：如果 n 是奇數，小杰一定可以實現他的願望。
- (b) 證明：如果 n 是偶數，小杰一定無法實現他的願望。