



2015 年 7 月 10 日，星期五

**問題 1.** 對於平面上的有限點集  $S$ ，如果任給  $S$  中的兩個相異點  $A, B$ ，都存在一點  $C \in S$  滿足  $AC = BC$ ，就稱  $S$  是平衡的；如果任給  $S$  中的三個相異點  $A, B, C$ ，皆不存在一點  $P \in S$  滿足  $PA = PB = PC$ ，就稱  $S$  是無中心的。

- (a) 證明：對所有的整數  $n \geq 3$ ，皆存在  $n$  個點的平衡點集。
- (b) 找出所有的整數  $n \geq 3$ ，使得  $n$  個點的平衡且無中心的點集是存在的。

**問題 2.** 找出所有的三元正整數組  $(a, b, c)$ ，使得

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

三數中的每一個數都是 2 的乘幂。

(2 的乘幂指的是形如  $2^n$  的整數，其中  $n$  為非負整數。)

**問題 3.** 設  $ABC$  為銳角三角形，其中  $AB > AC$ ， $\Gamma$  是它的外接圓， $H$  是它的垂心，而  $F$  是過  $A$  的高的垂足。令  $M$  為  $BC$  邊的中點。設  $Q$  為  $\Gamma$  上的一點，滿足  $\angle HQA = 90^\circ$ ；而  $K$  為  $\Gamma$  上的另一點，滿足  $\angle HKQ = 90^\circ$ 。已知  $A, B, C, K, Q$  這些點皆不相同，且依此順序落在  $\Gamma$  上。

證明：三角形  $KQH$  的外接圓與三角形  $FKM$  的外接圓相切。



2015 年 7 月 11 日，星期六

**問題 4.** 設三角形  $ABC$  的外接圓為  $\Omega$ ，外心為  $O$ 。一個以  $A$  為圓心的圓  $\Gamma$  與線段  $BC$  交於  $D, E$  兩點，其中  $B, D, E, C$  皆相異，並依此順序落在直線  $BC$  上。令點  $F, G$  為  $\Gamma$  與  $\Omega$  的交點，使得  $A, F, B, C, G$  各點依此順序落在  $\Omega$  上。令三角形  $BDF$  的外接圓與線段  $AB$  的另一個交點為  $K$ ，而三角形  $CGE$  的外接圓與線段  $CA$  的另一個交點為  $L$ 。

設直線  $FK$  與直線  $GL$  相異，且兩線交於點  $X$ 。證明： $X$  落在直線  $AO$  上。

**問題 5.** 令  $\mathbb{R}$  代表所有實數所成的集合。找出所有函數  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ，使得對任意實數  $x$  與  $y$ ，

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + y f(x)$$

均成立。

**問題 6.** 整數數列  $a_1, a_2, \dots$  滿足下列條件：

- (i) 對所有的  $j \geq 1$ ，均滿足  $1 \leq a_j \leq 2015$ ；
- (ii) 對所有的  $1 \leq k < \ell$ ，都有  $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ 。

證明：存在兩個正整數  $b$  與  $N$ ，使得對所有滿足  $n > m \geq N$  的整數  $m$  與  $n$ ，

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

均成立。