2014 年 *7* 月 *8* 日，星期二

問題 1. 設 $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ 是無窮正整數數列。證明：存在唯一的整數 $n \geq 1$，滿足

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

問題 2. 設 $n \geq 2$ 為整數。考慮一個由 n^2 個單位方格所組成的 $n \times n$ 棋盤。將 n 只城堡擺在棋盤的方格中，使得每一列及每一行都恰有一只城堡，如此稱為和平擺法。試找出最大的正整數 k，使得對每一種 n 只城堡的和平擺法，都能找到 $k \times k$ 的正方形，它的 k^2 個單位方格中都沒有城堡。

問題 3. 在凸四邊形 $ABCD$ 中，$\angle ABC = \angle CDA = 90°$。設 H 點是由 A 點向 BD 引垂線的垂足。令 S, T 兩點分別位於 AB 邊與 AD 邊上，滿足：H 落在三角形 SCT 內部，且

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°.$$

證明：直線 BD 是三角形 TSH 外接圓的切線。

2014 年 *7* 月 *9* 日，星期三

問題 4. 設 P, Q 兩點落在銳角三角形 ABC 的 BC 邊上，滿足 $\angle PAB = \angle BCA$ 及 $\angle CAQ = \angle ABC$。而 M, N 兩點分別落在直線 AP 與 AQ 上，使得 P 為 AM 的中點、Q 為 AN 的中點。證明：直線 BM 與 CN 的交點落在三角形 ABC 的外接圓上。

問題 5. 對每個正整數 n，開普敦銀行都發行幣值為 $\frac{1}{n}$ 的硬幣。今給定有限多個這樣的硬幣(其幣值不一定不同)，其總值最多為 $99 + \frac{1}{2}$。證明：可以將這些硬幣分成 100 堆或更少堆，使得每一堆硬幣的總值最多為 1。

問題 6. 平面上的一組直線，若其中任兩條不平行、任三條不共點，則稱這組直線位於一般位置。位於一般位置的直線組，將平面分割成若干區域，其中有些區域的面積是有限的；這些區域稱為此直線組的有限區域。證明：對任意足夠大的 n，皆可以在位於一般位置的 n 條直線組裡，選取至少 $\sqrt{n}$ 條直線著上藍色，使得此直線組沒有任何有限區域的邊界完全是藍色。

註：證出的結果中，如果 $\sqrt{n}$ 換成了 $c\sqrt{n}$，會依常數 c 之值給予分數。

考試時間：*4* 小時 *30* 分
每題 *7* 分