2013 年 7 月 23 日，星期二

問題 1. 證明對任一對的正整數 k 與 n，存在 k 個 (不必然相異的) 正整數 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 使得

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\Big(1+\frac{1}{m_1}\Big)\Big(1+\frac{1}{m_2}\Big)\cdots\Big(1+\frac{1}{m_k}\Big).$$

問題 2. 對於平面上的 4027 個點的配置方式，如果其中的 2013 點爲紅色、剩下的 2014 個點爲藍色、且任三點不共線，則稱此配置方式爲哥倫比亞式配置。在平面上畫出若干條直線，可以將平面分割成若干個區域。如果這些直線的排法滿足下列兩個條件，我們就稱這是一個好直線組：

- 任一條線不通過哥倫比亞式配置中的任何一點。
- 任一區域中不會同時出現兩種顏色的點。

求具有下列性質的最小的 k：對任何 4027 個點的哥倫比亞式配置，存在由 k 條直線構成的好直線組。

問題 3. 設三角形 ABC 相對於頂點 A 的旁切圓與邊 BC 切於點 A_1，並用類似的方式利用相對於頂點 B、C 的旁切圓分別定義 AC 邊上的點 B_1 與 AB 邊上的點 C_1。已知三角形 $A_1B_1C_1$ 的外心落在三角形 ABC 的外接圓上。證明三角形 ABC 爲直角三角形。

(所謂三角形 ABC 相對於頂點 A 的旁切圓，指的是與 BC 邊相切、並且與邊 AB, AC 的延長線相切的圓。相對於頂點 B, C 的旁切圓可類似定義。)

考試時間：*4* 小時 *30* 分
每題 *7* 分

2013 年 *7* 月 *24* 日，星期三

問題 4. 設 ABC 爲銳角三角形，H 爲其垂心，而 W 爲 BC 邊上嚴格介於 B、C 之間的一點。令 M, N 分別爲由 B, C 點所引的高的垂足。設 ω_1 是三角形 BWN 的外接圓，X 爲 ω_1 上的一點，且 WX 是 ω_1 的直徑。同理設 ω_2 是三角形 CWM 的外接圓，Y 爲 ω_2 上的一點，且 WY 是 ω_2 的直徑。證明 X, Y, H 三點共線。

問題 5. 將所有正有理數所成的集合記爲 $\mathbb{Q}_{>0}$。設函數 $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ 滿足下列三個條件：

(i) 對所有的 $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$，$f(x)f(y) \geq f(xy)$ 均成立；

(ii) 對所有的 $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$，$f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ 均立；

(iii) 存在有理數 $a > 1$ 滿足 $f(a) = a$。

證明 $f(x) = x$ 對所有 $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ 均成立。

問題 6. 設整數 $n \geq 3$。考慮一個圓上的 $n+1$ 個間隔相等的點，及所有將這些點以整數 $0, 1, \ldots, n$ 作爲標籤的標記法，其中每一個數字恰使用一次；兩個標記法中，如果其中一個標記法經過圓的旋轉後能夠得到另一個標記法，則這兩個標記法視爲相同。若對滿足 $a + d = b + c$ 的任意四個標籤 $a < b < c < d$，標籤 a 與標籤 d 兩點連成的弦及標籤 b 與標籤 c 兩點連成的弦均不相交時，稱此種標記法爲優美的。

令 M 表示所有優美標記法的個數；又令 N 表示滿足 $x + y \leq n$ 、且 $\gcd(x, y) = 1$ 的正整數的有序數對 (x, y) 的組數。證明

$$M = N + 1.$$

考試時間：*4* 小時 *30* 分
每題 *7* 分