2012 年 7 月 10 日, 星期二

問題 1. 令三角形 ABC 相對於頂點 A 的旁切圓之圓心爲 J. 該旁切圓與邊 BC 相切於 M, 並分別與直線 AB 和 AC 相切於 K 和 L. 直線 LM 與 BJ 相交於 F, 且直線 KM 與 CJ 相交於 G. 令 S 爲直線 AF 與 BC 之交點, 且令 T 爲直線 AG 與 BC 之交點。

試證: M 爲 ST 中點。

(所謂 ABC 相對於頂點 A 的旁切圓, 指的是與邊 BC 相切, 並且與邊 AB 和 AC 的延長線相切的圓。)

問題 2. 令 $n \geq 3$ 爲一正整數, 並令 $a_2, a_3, \cdots, a_n$ 爲滿足 $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$ 的正實數. 試證:

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\cdots(1+a_n)^n > n^n.$$

問題 3. 詐欺遊戲是個在甲乙兩人之間進行的遊戲。遊戲的規則取決於兩個被甲乙雙方都知道的正整數 k 與 n.

在遊戲開始時, 甲選定兩個正整數 x 和 N, 其中 $1 \leq x \leq N$. 甲不需讓乙知道 x 的值, 但甲必須誠實地告訴乙 N 的值。接著, 乙問甲一系列的問題來獲得關於 x 的資訊。乙的問題必須是以下形式: 在每次提問時, 乙任選一個由若干正整數所組成的集合 S (可以重複使用之前提問中使用過的集合) , 並詢問甲: “x 是否屬於 S?” 乙可以問任意數量的問題。在乙的每次提問後, 甲必須立刻回答乙 “是” 或 “否”, 但甲可以說謊任意次數。唯一的限制是, 在任意連續 $k+1$ 次回答中, 甲至少要誠實的回答一次。

在乙問完所有想問的問題之後, 乙必須指定一個至多包含 n 個正整數的集合 X. 如果 x 屬於 X, 則乙勝, 否則甲勝。證明:

1. 若 $n \geq 2^k$, 則乙有必勝法。
2. 對於所有充分大的 k, 存在一正整數 $n \geq 1.99^k$, 使得乙不存在必勝法。

考試時間: *4* 小時 *30* 分
每題 *7* 分

2012 年 7 月 11 日, 星期三

問題 4. 試求所有的函數 $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, 使得對於所有滿足 $a+b+c=0$ 的整數 a,b,c,

$$f(a)^2+f(b)^2+f(c)^2=2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a).$$

(其中 $\mathbb{Z}$ 代表所有整數所構成的集合。)

問題 5. 已知三角形 ABC 中, $\angle BCA=90^o$, D 是過頂點 C 的高的垂足。令 X 爲線段 CD 內的一點。令 K 爲線段 AX 上的一點, 使得 $BK=BC$. 類似地, 令 L 爲線段 BX 上的一點, 使得 $AL=AC$. 令 M 爲 AL 和 BK 交點。

試證: $MK=ML$.

問題 6. 求所有的正整數 n, 使得存在非負整數 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 滿足

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+\cdots+\frac{1}{2^{a_n}}=\frac{1}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_2}}+\cdots+\frac{n}{3^{a_n}}=1.$$