



2011年7月18日, 星期一

問題 1. 對任意由 4 個不同正整數所成的集合  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ , 記  $s_A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ . 設  $n_A$  是滿足  $a_i + a_j$  ( $1 \leq i < j \leq 4$ ) 整除  $s_A$  的數對  $(i, j)$  的個數. 求所有由 4 個不同正整數所成的集合  $A$ , 使得  $n_A$  達到最大值.

問題 2. 設  $S$  是平面上包含至少兩個點的一個有限點集, 其中沒有三點在同一條直線上.

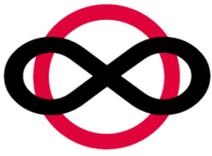
所謂一個‘風車’是指這樣一個過程: 從經過  $S$  中單獨一點  $P$  的一條直線  $\ell$  開始. 將  $\ell$  以  $P$  為旋轉中心順時針旋轉, 直到首次遇到  $S$  中的另一點, 記為點  $Q$ . 接著這條直線以  $Q$  為新的旋轉中心順時針旋轉, 直到再次遇到  $S$  中的某一點, 這樣的過程無限持續下去.

證明: 可以適當選取  $S$  中的一點  $P$ , 以及過  $P$  的一條直線  $\ell$ , 使得由此產生的‘風車’將  $S$  中的每一點都無限多次當作旋轉中心.

問題 3. 設  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是一個定義在實數集上的實值函數, 滿足對所有實數  $x, y$ , 都有

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x)).$$

證明: 對所有實數  $x \leq 0$ , 有  $f(x) = 0$ .



2011年7月19日, 星期二

問題 4. 給定整數  $n > 0$ . 有一個天平與  $n$  個重量分別為  $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$  的砝碼.

現通過  $n$  步操作依次將所有砝碼都放上天平, 使得在操作過程中, 右邊的重量從未超過左邊的重量. 每一步操作是從尚未放上天平的砝碼中選擇一個砝碼, 將其放到天平的左邊或右邊, 直到所有砝碼都被放上天平.

求整個操作過程的不同方法個數.

問題 5. 設  $f$  是一個定義在整數集上, 取值為正整數的函數. 已知對任意兩個整數  $m, n$ , 差  $f(m) - f(n)$  能被  $f(m - n)$  整除. 證明: 對所有整數  $m, n$ , 若  $f(m) \leq f(n)$ , 則  $f(n)$  被  $f(m)$  整除.

問題 6. 設銳角三角形  $ABC$  的外接圓為  $\Gamma$ , 令  $l$  是圓  $\Gamma$  的一條切線. 將  $l$  分別對直線  $BC, CA$  與  $AB$  做鏡射, 得直線  $l_a, l_b$  與  $l_c$ . 證明: 由直線  $l_a, l_b$  與  $l_c$  所構成的三角形, 其外接圓與圓  $\Gamma$  相切.