Language: **Chinese (Traditional)**

Day: **1**

2010 年 7 月 7 日, 星期三

問題 1. 找出所有函數 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 使得等式

$$f\big([x]y\big) = f(x)\,[f(y)]$$

對於所有 $x, y \in \mathbb{R}$ 都成立。(這裡 $[z]$ 表示小於或等於 z 的最大整數。)

問題 2. 令 I 爲三角形 ABC 的內心, 且 Γ 爲此三角形的外接圓。令 D 爲直線 AI 與圓 Γ 相交的另外一點。令 E 爲弧 $\widehat{BDC}$ 上的一點且 F 爲邊 BC 上的一點, 使得

$$\angle BAF = \angle CAE < \tfrac{1}{2}\angle BAC.$$

最後再令 G 爲線段 IF 的中點。證明: 直線 DG 與 EI 的交點落在圓 Γ 之上。

問題 3. 令 $\mathbb{N}$ 爲正整數的集合。找出所有的函數 $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 對於所有的 $m, n \in \mathbb{N}$, 使得

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

是一個完全平方數。

2010 年 7 月 8 日, 星期四

問題 4. 令 P 爲三角形 ABC 內部的一點。直線 AP, BP, CP 與三角形 ABC 的外接圓 Γ 的另一交點分別爲點 K, L, M. 令通過點 C 之圓 Γ 的切線與線 AB 相交於 S. 假設 $SC = SP$. 試證: $MK = ML$.

問題 5. 在六個盒子 $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ 中, 最初每個都只有一枚硬幣。有兩種操作方法可以執行:

- 方法 1: 選一個非空的盒子 B_j $(1 \le j \le 5)$. 從 B_j 中拿走一枚硬幣, 並且在 B_{j+1} 中多加入兩枚硬幣。
- 方法 2: 選一個非空的盒子 B_k $(1 \le k \le 4)$. 從 B_k 中拿走一枚硬幣, 並且將 B_{k+1} 與 B_{k+2} 中的所有硬幣彼此交換位置 (有可能是空盒子)。

試問: 是否存在一種有限的操作序列可以讓盒子 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 都是空的, 並且此時盒子 B_6 正好有 $2010^{2010^{2010}}$ 枚硬幣? (其中 $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

問題 6. 令 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 爲一個序列的正實數。假設存在某個正整數 s, 對於所有的 $n > s$, 我們有

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \le k \le n-1\}.$$

證明: 存在正整數 ℓ $(\ell \le s)$ 與 N, 對於所有的 $n \ge N$, 使得 $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$.

考試時間: *4* 小時 *30* 分
每題 *7* 分