2009 年 7 月 15 日, 星期三

問題 1. 令 n 爲正整數, 而 $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ 是由集合 $\{1, \ldots, n\}$ 所選出來的兩兩相異之整數, 使得 n 整除 $a_i(a_{i+1}-1)$ 對於 $i = 1, \ldots, k-1$. 證明: n 無法整除 $a_k(a_1-1)$.

問題 2. 令 O 爲三角形 ABC 的外接圓心, 且點 P 與 Q 分別是線段 CA 與 AB 的內點。令 K、L 與 M 分別爲線段 BP、CQ 與 PQ 的中點, 且圓 Γ 通過 K、L 與 M 三點。假設直線 PQ 與圓 Γ 相切, 試證明: $|OP| = |OQ|$.

問題 3. 假設 $s_1, s_2, s_3, \ldots$ 爲正整數的嚴格遞增數列, 使得它的兩個子數列

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \quad \text{與} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

皆是等差數列。證明: $s_1, s_2, s_3, \ldots$ 本身就是等差數列。

考試時間: 4 小時 30 分
每題 7 分

2009 年 7 月 16 日, 星期四

問題 **4.** 令三角形 ABC 有 $|AB| = |AC|$, 且 $\angle CAB$ 與 $\angle ABC$ 的角平分線分別交 BC 與 CA 於 D 與 E. 令 K 爲三角形 ADC 的內切圓心。假設 $\angle BEK = 45°$, 試求出 $\angle CAB$ 之所有可能的值。

問題 **5.** 假設函數 f 是由正整數對應到正整數, 使得對於任意正整數 a 與 b 都存在邊長爲

$$a, \quad f(b) \quad 與 \quad f(b + f(a) - 1)$$

的非退化三角形。求滿足此條件的所有 f. (三個頂點不共線的三角形稱爲非退化。)

問題 **6.** 令 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 爲兩兩相異的正整數; 且令集合 M 包含 $n-1$ 個正整數, 但其中沒有 $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. 有一隻蚱蜢在實數軸上, 從 0 開始向右跳 n 步, 依次的跳躍距離正好是 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 的某種排列。試證明: 可以選擇一種排列, 使得蚱蜢所落下的點絕不會是 M 之中的數字。