49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

星期三, *2008* 年 *7* 月 *16* 日

問題 **1.** 在一銳角三角形 ABC 中, 點 H 是垂心。以 BC 的中點爲圓心且通過 H 的圓交直線 BC 於 A_1, A_2 兩點。類似的, 以 CA 的中點爲圓心且通過 H 的圓交直線 CA 於 B_1, B_2 兩點; 以 AB 的中點爲圓心且通過 H 的圓交直線 AB 於 C_1, C_2 兩點。證明: A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 六點共圓。

問題 **2.** (a) 對所有滿足 $xyz = 1$, 且皆不等於 1 的實數 x, y, z, 證明

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1.$$

(b) 證明存在無窮多組滿足 $xyz = 1$, 且皆不等於 1 的有理數對 x, y, z, 使得上述不等式之等號成立。

問題 **3.** 證明存在無窮多個正整數 n, 使得 $n^2 + 1$ 具有大於 $2n + \sqrt{2n}$ 的質因數。

 考試時間: *4* 小時 *30* 分
每題 *7* 分

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

星期四, *2008* 年 *7* 月 *17* 日

問題 4. 找出所有滿足以下條件的函數 f. $f:(0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$ (即 f 爲一從正實數映至正實數的函數), 且對所有滿足 $wx=yz$ 的正實數 w, x, y, z,

$$\frac{\big(f(w)\big)^2+\big(f(x)\big)^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

都成立。

問題 5. 設固定的正整數 n 和 k 滿足 $k\geq n$ 且 $k-n$ 爲一偶數。給定 $2n$ 個分別編號爲 $1,\cdots,2n$ 的燈泡, 它們各有「開」與「關」兩種狀態。假設一開始時所有燈泡皆爲「關」的狀態。現在將調整各燈泡的狀態: 每次調整只改變某一個燈泡的狀態 (由「開」變成「關」或由「關」變成「開」)。

假設經過 k 次調整後, 編號 $1,\cdots,n$ 的燈泡皆在「開」的狀態, 而編號 $n+1,\cdots,2n$ 的燈泡皆在「關」的狀態。令 N 爲所有可以達到上述狀態的調整方法個數。另記 M 爲所有可以達到上述狀態, 但從未調整編號 $n+1,\cdots,2n$ 的燈泡的調整方法個數。

試求 N/M 的比值。

問題 6. 設 $ABCD$ 爲一凸四邊形且 $BA\neq BC$. 令三角形 ABC 和三角形 ADC 的內切圓分別爲 ω_1 與 ω_2. 假設有一個圓 ω 與射線 BA 相切於點 A 之後的某點, 也與射線 BC 相切於點 C 之後的某點; 且圓 ω 同時與直線 AD 及直線 CD 亦相切。證明: 圓 ω_1 和圓 ω_2 的兩條外公切線相交於圓 ω 上。

考試時間: *4* 小時 *30* 分
每題 *7* 分