2006 年 7 月 12 日

Problem 1. 令 I 爲三角形 ABC 的內心, 點 P 在三角形的內部, 滿足

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

試證: $AP \geq AI$, 且等號成立的充份必要條件爲 $P = I$.

Problem 2. 令 P 爲正 2006 邊形。如果 P 的一條對角線的兩端將 P 的邊界分成兩部分, 每部分皆包含 P 的奇數條邊, 則稱此對角線爲“好邊”。規定 P 的每條邊也是“好邊”。

已知 2003 條在 P 內部不相交的對角線將 P 分割成若干個三角形。試問在這種分割之下, 最多有多少個有二條 “好邊” 的等腰三角形。

Problem 3. 試求最小的實數 M, 使得不等式

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

對所有實數 a, b 與 c 都成立。

考試時間:*4* 小時 *30* 分
每題 *7* 分

2006 年 7 月 13 日

Problem 4. 試確定所有的整數對 (x, y), 使得

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problem 5. 令 $P(x)$ 爲 n 次 $(n > 1)$ 整係數多項式, 且令 k 爲一正整數。考慮多項式 $Q(x) = P(P(\cdots P(P(x))\cdots))$, 其中 P 出現 k 次。試證: 至多存在 n 個整數 t, 使得 $Q(t) = t$.

Problem 6. 對於凸多邊形 P 的任意邊 b, 以 b 爲一邊, 在 P 內部作一個面積最大的三角形。試證: 對 P 的每一邊, 按上述方法所得的三角形面積總和至少是 P 的面積的 2 倍。

考試時間:*4* 小時 *30* 分
每題 *7* 分