第 46 屆國際數學奧林匹亞 (IMO) 競賽試題

美利達　墨西哥

第一天

2005 年 7 月 13 日

Language: Chinese (Taiwan)

1. 在正三角形 ABC 的三邊上依下列方式選取六個點: 在邊 BC 上取 A_1, A_2; 在邊 CA 上取 B_1, B_2; 在邊 AB 上取 C_1, C_2, 使得上述六個點形成凸六邊形 $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ 其邊長都相等。試証: 三直線 A_1B_2, B_1C_2 與 C_1A_2 共點。

2. 設 $a_1, a_2, \cdots$ 爲一個整數數列且其中有無窮多項正整數及無窮多項負整數。如果對每一個正整數 n, 整數 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 被 n 除後所得的 n 個餘數都不同。試証: 每一個整數恰好在此整數數列中出現一次。

3. 設 x, y 和 z 爲正實數且滿足 $xyz \geq 1$. 試証

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

考試時間:4 小時 30 分

每題 7 分

第 46 屆國際數學奧林匹亞 (IMO) 競賽試題

美利達　墨西哥

第二天

2005 年 7 月 14 日

Language: Chinese (Taiwan)

4. 已知數列 $a_1, a_2, \cdots$ 定義如下:

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \ (n = 1, 2, \cdots)$$

試求與此數列中的每一項都互質的所有正整數。

5. 已知 $ABCD$ 爲一凸四邊形, $BC = AD$, 且 BC 不平行於 AD. 令 E 和 F 分別爲 BC 和 AD 邊上內部的點, 且滿足 $BE = DF$. 直線 AC 與 BD 交於 P 點, 直線 BD 與 EF 交於 Q 點, 直線 EF 與 AC 交於 R 點。試証: 當 E 和 F 變動時, 三角形 PQR 的外接圓經過除 P 點外的另一個定點。

6. 在某次數學競賽中提供參賽者六個題目, 其中的任二題都有超過 $\dfrac{2}{5}$ 的參賽者答對了。但沒有一位參賽者能答對所有的六個題目。試証: 至少有二位參賽者都恰好答對了五個題目。

考試時間:4 小時 30 分

每題 7 分

2.3 第46屆國際數學奧林匹亞競賽試題詳解

2.3.1 第一題:

試題委員會公布的參考解法:

令 P 在 ΔABC 內使得 ΔA_1A_2P 是正三角形, 則易得 $A_1PC_1C_2$, $A_2PB_2B_1$ 是菱形。故 ΔC_1B_2P 是正三角形。令 $\alpha = \angle B_2B_1A_2, \beta = \angle B_1A_2A_1, \gamma = \angle C_1C_2A_1$, 則因 α, β 是 ΔCB_1A_2 的外角且 $\angle C = 60°$, 故 $\alpha + \beta = 240°$。又 $\angle B_2PA_2 = \alpha, \angle C_1PA_1 = \gamma$, 故

$$\alpha + \gamma = 360° - (\angle C_1PB_2 + \angle A_1PA_2) = 240°.$$

故 $\beta = \gamma$。同理 $\angle C_1B_2B_1 = \beta$, 故 $\Delta A_1A_2B_1, \Delta B_1B_2C_1, \Delta C_1C_2A_1$ 全等, 即 $\Delta A_1B_1C_1$ 是正三角形。故 B_1C_2, A_1B_2, C_1A_2 分別是 A_1C_1, C_1B_1, B_1A_1 的垂直平分線, 因此三線共點。 ■

劉哲宇同學的解法:

令 $BA_1 = a, CA_2 = x_1 - a, CB_1 = b, AB_2 = x_1 - b, AC_1 = c, BC_2 = x_1 - c$, 由餘弦定理可得

$$a^2 + (x_1 - c)^2 - a(x_1 - c) = c^2 + (x_1 - b)^2 - c(x_1 - b) = b^2 + (x_1 - a)^2 - b(x_1 - a).$$

由前兩式比較化簡可得

$$(c + a - 2b)x_1 = (a - b)(a + b + c),$$

同理

$$(b + c - 2a)x_1 = (c - a)(a + b + c),$$

$$(a + b - 2c)x_1 = (b - c)(a + b + c).$$

令$\alpha = a - b, \beta = c - a, \gamma = b - c$, 則上三式可寫為

$$(\alpha - \gamma) = \alpha(a + b + c), (\beta - \alpha) = \beta(a + b + c), (\gamma - \beta) = \gamma(a + b + c).$$

因此 $\frac{\alpha-\gamma}{\alpha}=\frac{\beta-\alpha}{\beta}=\frac{\gamma-\beta}{\gamma}$, 故

$$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\sqrt[3]{\frac{\gamma\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}}=1,$$

故 $\alpha=\beta=\gamma$, 即 $AC_1=BA_1=CB_1$, $AB_2=BC_2=CA_2$.

若 B_2A_1, B_1C_2, C_1A_2 三線不共點, 設其兩兩分別交於 E, F, G。因為 $\Delta CA_1B_2, \Delta AB_1C_2, \Delta BC_1A_2$ 全等, 故 $\angle EA_1A_2=\angle FB_1B_2=\angle GC_1C_2$, $\angle EA_2A_1=\angle FB_2B_1=\angle GC_2C_1$, 故 $\Delta EA_1A_2, \Delta FB_1B_2, \Delta GC_1C_2$ 全等, 且 ΔEFG 爲正三角形。

令 $A_1E=x, A_E=C_2G=y$, 正三角形 ΔEFG 邊長爲 t。分別在 $\Delta EA_1A_2 . \Delta FC_2A_1$ 中用餘弦定理, 且利用 $A_1A_2=A_1C_2$, 有

$$x^2+y^2-xy=(x-t)^2+(y-t)^2-(x-t)(y-t),$$

化簡後得 $t(t-x-y)=0$, 即 $t=x+y$ (明顯不合) 或 $t=0$。但 $t=0$ 表示 B_2A_1, B_1C_2, C_1A_2 三線共點, 得證。 ■

評註: 此題的關鍵是要證明三個角上的三角形全等, 大會題供的綜合幾何參考解答作法中的輔助線相當巧妙。此題難度超乎選題委員會的預測, 排名前十名的國家全對的只有俄羅斯與匈牙利, 在歷屆的第一題中是少見的。我國四位此題滿分的選手都採取三角計算, 兩位由餘弦定理切入, 兩位用正弦定理切入。

2.3.2 第二題:

試題委員會公布的參考解法:

題目條件即對於任意固定的正整數 M, $a_1, a_2, \ldots, a_M$ 模 M 構成完全剩餘系。首先先證若 $i<j$, 則 $a_i \neq a_j$。否則 $\{a_1, \ldots, a_n\}$ 在模 j 之下必包含至多 $j-1$ 個不同的餘數, 矛盾。再證若 $i<j\leq n$, 則 $|a_i-a_j|\leq n-1$。否則若 $m:=|a_i-a_j|\geq n$, 則 $\{a_1, \ldots, a_m\}$ 會含有兩數對模 m 同餘, 也矛盾。

給定 $n\geq 1$, 令 $i(n), j(n)$ 是使得 $a_{i(n)}, a_{j(n)}$ 爲 $a_1, \ldots, a_n$ 中最小與最大的數的足碼。之前的論證告訴我們 $|a_{i(n)}-a_{j(n)}|=n-1$, 因此 $\{a_1, \ldots, a_n\}$ 包含所有從 $a_{i(n)}$ 到 $a_{j(n)}$ 的所有數字。

令 x 爲任意整數。因爲有無限多個 k 使得 $a_k < 0$, 且數列所有的項都相異, 因此存在 i 使得 $a_i < x$。同理, 存在 j 使得 $x < a_j$。故若 $n > \max\{i, j\}$, 則每一個介於 a_i 與 a_j 的數 (特別, x 也是) 都會在 $\{a_1, \ldots, a_n\}$ 之中。 ■

蔡政江同學的解法:

對任意 $a_i, a_j, i < j$, 若 $|a_i - a_j| \geq j$, 則 $a_1, a_2, \ldots, a_{|a_i - a_j|}$ 之中會有 a_i, a_j 被 $|a_i - a_j|$ 除之後餘數相同, 矛盾。故 $|a_i - a_j| \leq j - 1$。另外, 顯然對於任意 i, j 都有 $a_i \neq a_j$, 否則 a_i, a_j 對模 j 同餘。因此底下只要證明每個整數都有出現即可。

先證明給定自然數 n, $a_1, \ldots, a_n$ 是連續的 n 個整數 (但不一定按照順序排列)。用數學歸納法。$n = 1$ 明顯成立。假設 $n \geq 2$, 且已知 $a_1, \ldots, a_{n-1}$ 是連續的。設 $\{a_1, \ldots, a_{n-2}\} = x+1, \ldots, x+(n-1)$。由題目條件有 $a_n \equiv x \bmod n$。若 $a_n \leq x - n$, 則 $|a_n - a_1| = n + 1 > n$, 矛盾。同理若 $a_n \geq x + 2n$ 導致$|a_n - a_1| = 2n - 1 > n$, 矛盾。故 $a_n = x$ 或 $a_n = x + n$, 即 $a_1, \ldots, a_n$ 是連續的 n 個整數。

對原題用反證。設某整數 k 在數列從未出現過, 則由以上論證知對於任意 i, 都有 $a_i > k$ 或 $a_i < k$。此違反數列 $\{a_n\}$ 包含無限多個正數與負數的條件, 矛盾。故原題得證。 ■

評註: 這題的關鍵是證明對於任意給定的 M, $\{a_1, \ldots, a_M\}$ 是一段連續的整數。最後的論證用到離散形式的中間值定理。我們五位同學作出解答的同學採取的方法都類似。

2.3.3 第三題:

試題委員會公布的參考解法:

簡單的變形後可知原式等價於

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2} \leq 3.$$

由柯西不等式以及 $xyz \leq 1$, 可得

$$(x^5+y^2+z^2)(yz+y^2+z^2) \geq (x^{5/2}(yz)^{1/2}+y^2+z^2)^2 \geq (x^2+y^2+z^2)^2,$$

即

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} \le \frac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

取循環和, 以及利用 $x^2+y^2+z^2 \ge yz+zx+xy$, 得到

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2} \le 2+\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+x^2} \le 3,$$

得證。 ■

王琨傑同學的解法:

以下的$\sum$ 都表示輪換和。欲證的不等式全部通分展開後, 經過計算化簡, 欲證的不等式等價於 (計算從略, 考卷上此處計算了滿滿兩頁)

$$3x^5y^5z^5+2\sum x^7y^5+\sum x^9+\sum x^5y^2z^2 \ge \sum x^5y^5z^2+\sum x^5y^4+\sum x^6+\sum x^4y^2+3x^2y^2z^2.$$

故只要證明此式即可。底下分別證明六個不等式, 將六個不等式相加後等於上式, 從而得證。

由 $\frac{x^5y^5z^5+x^5y^3z^5+z^7y^5+z^5y^7}{4} \ge \sqrt[4]{x^{22}y^{22}z^{10}} = x^5y^5z^2(xyz)^{1/2} \ge x^5y^5z^2$, 輪換相加後得

$$\frac{3}{2}x^5y^5z^5+\frac{1}{4}\sum x^7y^5 \ge \sum x^5y^5z^2. \tag{1}$$

由 $\frac{x^7y^5+x^5y^7+x^5y^2z^2}{3} \ge \sqrt[3]{x^{17}y^{14}z^2} = x^5y^4(xyz)^{2/3} \ge x^5y^4$, 輪換相加後得

$$\frac{2}{3}x^7y^5+\frac{2}{3}\sum x^5y^2z^2 \ge \sum x^5y^4. \tag{2}$$

由 $\frac{x^9+x^9+x^2y^2z^2}{3} \ge \sqrt[3]{x^{20}y^2z^2} = x^6(xyz)^{2/3} \ge x^6$, 輪換相加後得

$$\frac{2}{3}\sum x^9+x^2y^2z^2 \ge \sum x^6. \tag{3}$$

由 $\frac{x^7y^5+x^5y^7+x^9+x^5y^2z^2+2x^2y^2z^2}{6} \ge \sqrt[6]{x^{30}y^{18}z^6} = x^4y^2(xyz) \ge x^4y^2$, 輪換相加後得

$$\frac{1}{3}x^7y^5+\frac{1}{3}\sum x^9+\frac{1}{3}\sum x^5y^2z^2+2x^2y^2z^2 \ge \sum x^4y^2. \tag{4}$$

又,

$$\frac{3}{4}\sum x^7y^5 \ge \frac{3}{4}\cdot 6\cdot \sqrt[6]{x^{24}y^{24}z^{24}} = \frac{9}{2}x^2y^2z^2(xyz)^2 \ge \frac{9}{2}x^2y^2z^2, \tag{5}$$

以及

$$\frac{3}{2}x^5y^5z^5 \ge \frac{3}{2}x^2y^2z^2, \tag{6}$$

將 (1)(2)(3)(4)(5)(6) 相加後即得證。 ■

評註: 這一題參考解答相當人工化, 相當不常規的式子變形(要將分子換到分母) 不易想到, 是有一定的困難度。然而這一類對稱的題目, 在無計可施之下展開成幾百項, 硬用算幾不等式"有機會"可以湊出來。雖說如此, 展開的大量計算仍然需要勇氣, 信心和經驗, 也是很不容易的。我們作出來的三位同學都因爲考試時間還剩下超過兩個小時, 變形又不易想到, 因此採取展開的策略。而展開後的處理都不相同。此題有 Moldova 有一位選手得到特別獎, 因爲他只寫了兩行就證出來, 簡直出神入化, 領隊會議無異議通過他得到特別獎。

2.3.4 第四題:

試題委員會公布的參考解法:

我們證明 1 是唯一的解。只要證明任意質數 p 都是某 a_n 的因數即可。$p = 2, 3$ 時顯然成立, 因爲 $a_2 = 48$。

令質數 $p > 3$. 底下所有的同餘都模 p. 由費馬小定理, $2^{p-1} \equiv 1, 3^{p-1} \equiv 1, 6^{p-1} \equiv 1$. 因此 $3 + 2 + 1 \equiv 6$ 可化爲

$$3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} \equiv 6,$$

即

$$6 \cdot 2^{p-2} + 6 \cdot 3^{p-2} + 6 \cdot 6^{p-2} \equiv 6.$$

同除 6 得到 $a_{p-2} = 2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1$ 是 p 的倍數, 因此原題得證。 ■

歐陽奕同學的解法:

$a_2 = 48$, 而顯然 $2|a_2, 3|a_2$. 又 $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 = (2^n + 1)(3^n + 1) - 2$. 令 $p > 3$ 爲質數, 且令 $(2^{p-2} + 1)(3^{p-2} + 1) = k$, 則由費馬小定理知

$$6k = (2^{p-1} + 2)(3^{p-1} + 3) \equiv (1 + 2)(1 + 3) \equiv 12 \bmod p.$$

因 $(6,p)=1$, 故 $k\equiv(12/6)\equiv 2 \bmod p$, 從而 $a_{p-2}=(2^{p-2}+1)(3^{p-2}+1)-2=k-2\equiv 2-2\equiv 0 \bmod p$. 對於任一正整數 x 若其質因數爲 $p\neq 2,3$, 故有 $p|a_{p-2}$, 又 $(x,a_{p-2})\neq 1$, 故所有大於 1 的正整數接不可能和數列 a_n 每一項都互質。因此 1 是唯一的解。 ■

評註: 此題的關鍵是由費馬小定理得出 a_{p-2} 是 p 的倍數。五位作出解答的同學都是用同樣的方法。

2.3.5 第五題:

試題委員會公布的參考解法:

令 AC, BD 的垂直平分線交於 O, 底下證明 O 點爲所求之定點。由 $OA=OC, OB=OD, DA=BC$, 故 $\Delta ODA\cong\Delta OBC$. 因此以 O 點爲旋轉中心旋轉 $\angle BOD$ 會將 B 點轉到 C 點, 將 C 點轉到 A 點。因 $BE=DF$, 旋轉也將 E 轉到 F 點。因此 $OE=OF$, 且

$$\angle EOF=\angle BOD=\angle COA.$$

因此三個等腰三角形 $\Delta EOF, \Delta BOD, \Delta COA$ 都相似。

假設 AB, CD, EF 不全平行。不失一般性令 EF, CD 交於 X。在 $\Delta ACD, \Delta BCD$ 中用 Menelaus 定理, 得到

$$\frac{AR}{RC}=\frac{AF}{FD}\cdot\frac{DX}{XC}=\frac{CE}{EB}\cdot\frac{DX}{XC}=\frac{DQ}{QB}.$$

(若 AB, CD, EF 平行, 則 $ABCD$ 是等腰梯形, E, F 是邊上的中點, 此時 $\frac{AR}{RC}=\frac{DQ}{QB}$ 是顯然的。)

因此由此式及 $\Delta BOD\sim\Delta COA$, 可知 $\Delta BOQ\sim\Delta COR$. 因此 $\angle BQO=\angle CRO$, 即 P, Q, R, O 四點共圓。 ■

葉仲恆同學的解法:

令 $\Delta ADP, \Delta BPC$ 的外接圓交於 O 點, 底下證明 O 點即是所求的定點。因爲 $\angle PAO=\angle PDO, \angle PCO=\angle PBO$, 故 $\Delta BOD\sim\Delta COA$, 即

$$\frac{DB}{AC}=\frac{BO}{CO}.$$

由 Menelaus 定理, 有 $(AR/RP)\cdot(PQ/QD)\cdot(DF/FA)=1=(CR/RP)\cdot(PQ/QB)\cdot(BE/EC)$, 又因 $BE=FD, CE=BC-BE=AD-DF=AF$, 故 $AR/QD=CR/QB$, 故 $QB/QD=CR/AR$, 從而 $QB/BD=CR/CA$, 故

$$\frac{QB}{CR}=\frac{BD}{CA}.$$

由 $\angle QBO=\angle RCO$, 且 $QB/CR=BD/CA=BO/CO$, 因此 $\Delta QBO\sim\Delta RCO$. 故 $\angle BQO=\angle CRO$, 即 P,Q,R,O 四點共圓, 且 O 點爲一定點。故 ΔPQR 的外接圓通過定點 O。 ■

評註: 這一題是標準的中等難度的綜合幾何, 是我們的強項。問題的關鍵是要看出定點的位置, 之後就容易處理。我們在這一題拿到滿分, 六位國手用了六個不同的解法, 大會協調員讚歎不已。

2.3.6 第六題:

試題委員會公布的參考解法:

設有 n 個參賽者, 令 p_{ij} 表同時答對 $i,j(1\le i<j\le 6)$ 的人數個數, 令 n_r 表示恰答對 $r(0\le r\le 6)$ 的問題的人數個數。顯然 $\sum n_r=n$。

由假設, $p_{ij}\ge\frac{2n+1}{5}, i<j$, 因此

$$S:=\sum_{i<j}p_{ij}\ge 15\cdot\frac{2n+1}{5}=6n+3.$$

恰答對 r 個問題的人貢獻了 ‘1’ 給和式中的 $\binom{r}{2}$ 項。因此

$$S=\sum_{r=0}^{6}\binom{r}{2}n_r.$$

兩個估計合併起來得到

$$3\le S-6n=\sum_{r=0}^{6}(\binom{r}{2}-6)n_r, \tag{7}$$

此式可寫爲

$$4n_5+9n_6\ge 3+6n_0+6n_1+5n_2+3n_3.$$

因沒人答對所有題目, $n_6 = 0$, 由上式故 $n_5 > 0$. 我們的目標是證明 $n_5 \geq 2$, 用反證法, 設 $n_5 = 1$。因此 $n_0, n_1, n_2, n_3 = 0$, 故 $n_4 = n - 1$。此時 (7) 式的右邊化爲 $S = 6n + 4$。

$S = \sum p_{ij}$ 的 15 項每一項都至少是 $\frac{2n+1}{5} = \lambda$。因爲 $S = 6n + 4$ 不是 15 的倍數, 因此有 14 項是 λ, 而一項是 $\lambda + 1$。

令 (i_0, j_0) 是使得 $p_{i_0 . j_0} = \lambda + 1$ 的那一對題組。稱答對五題的人爲'優勝者'。不失一般性, 設優勝者沒解出第六題, 且第一題不在 (i_0, j_0) 中; 即 $2 \leq i_0 < j_0 \leq 6$。考慮兩個和

$$S' = p_{16} + p_{26} + p_{36} + p_{46} + p_{56}, \quad S'' = p_{12} + p_{13} + p_{14} + p_{15} + p_{16}.$$

設第六題被 x 個人解出 (每人貢獻了 '3' 給 S'), 第一題被 y 個人 (除了優勝者) 解出 (每人貢獻了 '3' 給 S'', 優勝者貢獻了 '4')。因此 $S' = 3x$, $S'' = 3y + 4$。

因 (i_0, j_0) 沒有出現在 S'' 中, 因此 $S'' = 5\lambda = 2n + 1$. 而 $S' = 5\lambda$ 或 $5\lambda + 1$。因此 $3x \in \{2n+1, 2n+2\}$, 且 $3y + 4 = 2n + 1$。但這不可能, 由 mod3 可知。故原題得證。 ■

黃信溢同學的解法:

假設有 x 人, 題目爲 A, B, C, D, E, F。將人放一邊, 題目放一邊做爲頂點, 有答對關係的即連線, 而形成一個二分圖 G, 我們計算

$$題 \longleftrightarrow 人 \longleftrightarrow 題$$

這樣的子圖 (以下記爲 $\star$) 的個數。我們用反證法。

如果沒有人答對五個題目: 此時所有人答對 0-4 個題目。因爲每個人最多四題, 每個人最多貢獻六個 $\star$, 因此 $\star$ 至多 $6x$ 個。另一方面, 任兩題至少給了 $> \frac{2}{5}x$ 個, 而共有 15 個兩題組, 因此 $\star$ 數目超過 $15 \cdot \frac{2}{5} = 6x$ 個, 矛盾。

如果恰好一個人答對五題。分成兩個情況:

若有一人答對三題以下, 則以人來看 $\star$ 的數目至多 $\binom{5}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2}(x-2) = 6x + 1$ 個。但是以題來看, 任兩題至少給了 $> \frac{2}{5}x$ 個 $\star$。又 $> \frac{2}{5}x$ 表示 $\geq \frac{2x+1}{5}$, 因此 $\star$ 的個數 $\geq \frac{2x+1}{5}\binom{6}{2} = 6x + 3$, 矛盾。

若每人答對四題, 且恰一人答對五題, 此時 $\star$ 的數目爲 $\binom{5}{2} + \binom{4}{2}(x-1) = 6x + 4$ 個。又由上知道 $\star$ 的個數 $\geq 6x + 3$, 因此有兩題 A, B, 它們對到的 $\star$ 有 $\frac{2x+1}{5} + 1$ 個, 其他的兩題組它們對到的 $\star$ 有 $\frac{2x+1}{5}$ 個。現在假設那位對五題的人爲 M。再細分 爲兩個情形:

(1) 如果 M 答對的那五題有包含 A, B 兩題, 不妨設爲 A, B, C, D, E。則所有 $\star$ 中含有 A 的, 有 $\frac{2x+1}{5}+1+\frac{2x+1}{5}\cdot 4=2x+2$ 個。但是答對 A 的所有人中, M 貢獻了四個 $\star$, 其他都貢獻三個 $\star$。因此 $4+3k_1=2x+2$, 即 $3|(2x+1)$。另一方面, 則所有 $\star$ 中含有 C 的, 有 $\frac{2x+1}{5}\cdot 5=2x+1$ 個。而答對 C 的所有人中, M 貢獻了四個 $\star$, 其他都貢獻三個 $\star$。因此 $4+3k_2=2x+1$, 即 $3|2x$。兩者矛盾。

(2) 如果 M 答對的那五題中, A, B 不同時在其中。因爲只有六題, M 必答對 A 或 B, 設 M 答對 A。則所有 $\star$ 中含有 A 的, 有 $\frac{2x+1}{5}+1+\frac{2x+1}{5}\cdot 4=2x+2$ 個。但是答對 A 的所有人中, M 貢獻了四個 $\star$, 其他都貢獻三個 $\star$。因此 $4+3k_3=2x+2$, 即 $3|(2x+1)$。另一方面, M 答對的五題中必另有一題 C。則所有 $\star$ 中含有 C 的, 有 $\frac{2x+1}{5}\cdot 5=2x+1$ 個。但是答對 C 的所有人中, M 貢獻了四個 $\star$, 其他都貢獻三個 $\star$。因此 $4+3k_4=2x+1$, 即 $3|2x$。兩者矛盾。

因此無論如何不可能只有 ≤ 1 個人答對五題, 及至少有兩位恰答對五題。得證。

評註: 這一題反覆用 Fubini 原理。中間一個重要關鍵是 (除了一個兩題組之外) 任兩題組其答對的人數都相同; 而那個特別的兩題組, 答對的人數多了一位。三位沒作出來的國手都卡在這一步, 大會評分標準相當嚴格, 在突破這一步之前所有的部分結果都只能拿到一分。