第 45 屆國際數學奧林匹亞競賽試題與參考解答

傅承德*　洪文良**
*中央研究院　統計科學研究所
**國立新竹師範學院　數學教育學系

2004 年第 45 屆國際數學奧林匹亞競賽 (IMO) 是在希臘的雅典舉行；本屆共有 85 個國家與會，合計 486 位學生代表參賽。競賽活動是由各國領隊組成的評審會議 (Jury Meeting) 揭開序幕，除了確認各項議題外，評審會議的一個主要工作是挑選本屆的競賽試題。國際數學奧林匹亞競賽試題是先由各參賽國（主辦國除外）於規定時間期限內提交道試題，再由主辦國的試題委員會(Problem Selection Committee) 研究選出大約 30 道預選試題，分屬代數、分析、數論、幾何及組合數學等不同領域和不同難度的試題；最後再經由評審會議票選暨修訂出最後 6 道 IMO 試題，再依主題內容及難易層次分配成兩份試題，分別在連續的兩天舉行競試，每天三道試題，考試時間都是 4.5 小時。本屆試題經由主辦國的試題委員會選出他們認為較適當的 27 道試題，再由各國領隊組成的評審會議經過三天的討論票選出二道代數題、一道數論題、二道幾何題及一道組合題，其中第一題為幾何題、第二題為代數題（函數方程）、第三題為組合題、第四題為代數題（不等式）、第五題為幾何題、第六題為數論題。

今年我國六位學生：黃道生（建國中學）、蔡政江（高雄中學）、趙心宇（建國中學）、黃信溢（建國中學）、王琨傑（建國中學）、莫立平（建國中學），總成績 190 分，榮獲三面金牌、三面銀牌，在 85 隊中名列第六名。總分前二十名的國家依次為：中國大陸、美國、俄羅斯、越南、保加利亞、台灣、匈牙利、日本、伊朗、羅馬尼亞、烏克蘭、白俄羅斯、印度、以色列、波蘭、摩達維亞、新加坡、蒙古、英國、巴西、加拿大、哈薩克、塞爾維亞（巴西、加拿大、哈薩克、塞爾維亞等四國總分相同）。本文針對此次我國代表團所翻譯成中文版的六道 IMO 試題提供參考解答，以供國內相關學者、數學教師等輔導數學資優生之研究、應用與參考。

一、第 45 屆國際數學奧林匹亞競賽試題

2004 年 7 月 12 日　考試時間：4.5 小時　每題 7 分

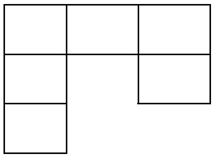
第一題： 已知銳角三角形 ABC 中, $AB \neq AC$ 。以 BC 為直徑的圓分別交邊 AB 與 AC 於點 M 與 N 。令 O 為線段 BC 的中點。設 $\angle BAC$ 與 $\angle MON$ 的角平分線交於點 R。試證：ΔBMR 的外接圓與 ΔCNR 的外接圓有一交點在線段 BC 上。

第二題： 設 $P(x)$ 為一實係數多項式。若對所有實數 a,b,c 滿足 $ab+bc+ca=0$,則

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

試求滿足這樣條件的所有實係數多項式 $P(x)$。

第三題：「勾形」是由 6 個邊長為 1 的正方形所組成的圖形（如圖所示）



或將此圖形經由旋轉及翻轉所得之任意圖形。

試求能夠被這些大小相同的「勾形」所填滿之所有 $m\times n$ 矩形,其中「勾形」在填滿矩形時不能有空隙及重疊,且不能有任一部分圖形超出此矩形。

2004 年 7 月 13 日　考試時間：4.5 小時　每題 7 分

第四題： 設 $n \geq 3$ 為正整,數及 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 為正實數,使得

$$n^2+1>(t_1+t_2+\ldots+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\ldots+\frac{1}{t_n}\right)$$

試證：對所有整數 i,j,k 滿足 $1\leq i<j<k\leq n$,則 t_i, t_j, t_k 必為某一個三角形之三邊長。

第五題： 已知凸四邊形 C $ABCD$ 中,對角線 BD 既不能平分 $\angle ABC$,也不能平分 $\angle CDA$ 。設為 P 四邊形 $ABCD$ 內部的一點且滿足 $\angle PBC=\angle DBA$ 及 $\angle PDC=\angle BDA$

試證： $ABCD$ 為圓內接四邊形之充要條件為 $AP=CP$

第六題： 如果一個正整數的所有位數中的任意相鄰二個數字正好是奇數與偶數交錯出現,我們稱這個正整數為「交錯整數」。

試求所有正整數 n ,使得 n 必有一個交錯整數是其倍數。

二、第 45 屆國際數學奧林匹亞競賽成績統計

表 1. 2004 年第 45 屆 IMO 前 20 名國家各國成績統計表

名次	國　　名	總分	金牌	銀牌	銅牌	參賽人數
1	中國大陸 CHN	220	6	0	0	6
2	美國 USA	212	5	1	0	6
3	俄羅斯 RUS	205	4	1	1	6
4	越南 VIE	196	4	2	0	6
5	保加利亞 BUL	194	3	3	0	6
6	台灣 TWN	190	3	3	0	6
7	匈牙利 HUN	187	2	3	1	6
8	日本 JPN	182	2	4	0	6
9	伊朗 IRN	178	1	5	0	6
10	羅馬尼亞 ROM	176	1	4	1	6
11	烏克蘭 UKR	174	1	5	0	6
12	白俄羅斯 BLR	154	0	4	2	6
13	印度 IND	151	0	4	2	6
14	以色列 ISR	147	1	1	4	6
15	波蘭 POL	142	2	1	1	6
16	摩達維亞 MLD	140	2	0	4	6
17	新加坡 SIN	139	0	3	3	6
18	蒙古 MON	135	0	3	2	6
19	英國 UNK	134	1	1	4	6
20	巴西 BRA	132	0	2	4	6
20	加拿大 CAN	132	1	0	3	6
20	哈薩克 KAZ	132	2	0	2	6
20	塞爾維亞 SCG	132	0	2.	3	6

表 2. 2004 年第 45 屆 IMO 中華民國學生代表得分及成績統計表

姓　　名	第 1 題	第 2 題	第 3 題	第 4 題	第 5 題	第 6 題	總分	獎牌
趙 心 宇	7	7	3	7	6	2	32	金牌
蔡 政 江	6	7	7	7	7	7	41	金牌
黃 道 生	0	7	4	7	7	7	32	金牌
王 琨 傑	7	6	2	7	5	0	27	銀牌
黃 信 溢	7	6	0	7	5	4	29	銀牌
莫 立 平	6	6	3	7	4	3	29	銀牌

三、第 45 屆數學奧林匹亞競賽試題詳解

第一題：試題委員會公布的參考答案：

參考解答（一）：因 $OM=ON$,$\angle MON$ 的角平分線與 MN 的垂直平分線重疊。所以在 ΔAMN 中,$\angle MAN$ 的角平分線和邊 MN 的垂直平分線相交於 R。然而,R 在三角形之外接圓上。（需要注意的是 $AM \neq AN$；因 $BCNM$ 四點共圓,故 $\angle AMN=\angle C$ 且 $\angle ANM=\angle B$,且由假設知 $\angle B \neq \angle C$。）

令 $\angle BAC$ 的角平分線與 BC 相交於 L。顯然地,L 是圓（BMR）和圓（CNR）共同的交點。其意為 $BLRM$ 和 $CLRN$ 分別是四點共圓,此等價於 $\angle ARM=\angle ABC$ 和 $\angle ARN=\angle ACB$,但如上所述,$\angle ABC=\angle ANM$ 和 $\angle ACB=\angle AMN$,所以問題簡化為 $\angle ARM=\angle ANM$,$\angle ARN=\angle AMN$。

這些角的等式是從圓內接四邊形 $AMRN$ 得到的,故得證。

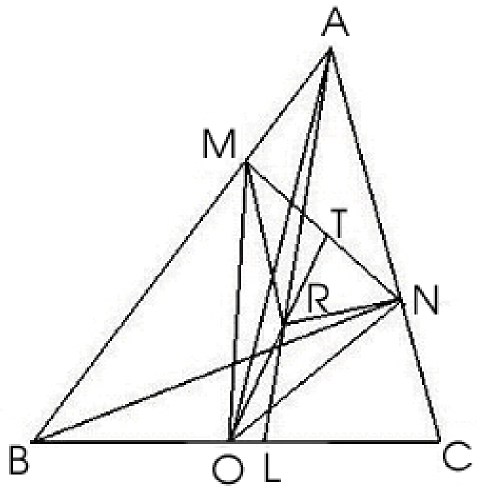
參考解答（二）：T 代表 MN 的中點。因 ΔABC 和 ΔANM 是相似的,其中線分別為 AO 和 AT,故 $\angle BAO=\angle CAT$。因此 $\angle BAC$ 的角平分線 AR 也平分角 $\angle OAT$。因此

$$\frac{RT}{RO}=\frac{AT}{AO}\text{。}$$

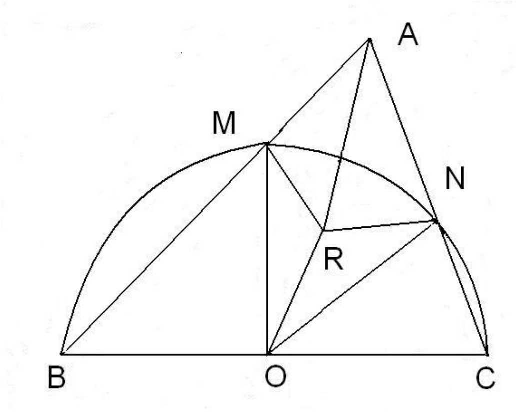
再利用 AO 和 AT 分別是兩個相似三角形的中線,我們可得

$$\frac{AT}{AO}=\frac{MN}{BC}=\frac{MT}{BO}=\frac{MT}{MO}\text{。}$$

所以,MR 平分 $\angle OMN$。今,$\angle BMO=\angle B$（O 是圓（$BCNM$）的圓心）。結合 $\angle AMN=\angle C$,可得 $\angle OMN=\angle A$ 且 $\angle BMR=\angle B+\angle A/2=\angle CLR$。所以 B,L,R,M 共圓。同理可得,C,L,R,N 共圓。



黃信溢同學的解法：由題可知, $\overline{OM}=\overline{ON}$（$\because O$ 為 $\overline{BC}$ 之中點,且 O 為圓心,$\overline{BC}$ 為半徑）



又現 $\overleftrightarrow{OR}$ 交 $\overleftrightarrow{AR}$ 於 R

且 $\because \overleftrightarrow{OR}$ 為 $\angle MON$ 之角平分線

$\therefore \angle MOR=\angle NOR$

$\Rightarrow \Delta OMR\cong\Delta ONR$（SAS）

故 $\overline{MR}=\overline{NR}$

又我們知 $\angle MAR=\angle NAR$（$\because \overleftrightarrow{AR}$ 為 $\angle A$ 之平分線）

故由正弦定理知 $\dfrac{\overline{MR}}{\sin\angle MAR}=\dfrac{\overline{AR}}{\sin\angle AMR},\dfrac{\overline{NR}}{\sin\angle NAR}=\dfrac{\overline{AR}}{\sin\angle ANR}$

又由 $\dfrac{\overline{MR}}{\sin\angle MAR}=\dfrac{\overline{AR}}{\sin\angle NAR}$ 知,$\sin\angle AMR=\sin\angle ANR$

但 $\because \angle AMR\neq\angle ANR$,因為如果相等,則 $\angle ARM=\angle ARN\Rightarrow A,R,O$ 三點共線

此時 $\overline{AB}=\overline{AC}$ $\therefore \angle AMR=180^\circ-\angle ANR$ 即 $\angle BMR+\angle CNR=180^\circ$

現我假設 ΔBMR 之外接圓交 $\overline{BC}$ 於 P,則 $\because B,M,R,P$ 四點共圓

$\therefore \angle BMR=\angle CPR$（不論交於哪裡皆可）,但

$\angle BMR+\angle CNR=180^\circ$

故 $\angle CNR+\angle CPR=180^\circ\Rightarrow C,N,R,P$ 四點共圓

由此可知,ΔBMR,ΔCNR 之外接圓交點在 $\overline{BC}$ 上。

第二題：試題委員會公布的參考答案：

參考解答（一）：

此題的解為 $P(x)=\alpha x^2+\beta x^4$,其中 $\alpha,\beta\in R$。令 $P(x)$ 滿足給定的方程式。如果 $a=b=0$ 且 $ab+bc+ca=0$ 對每一個 $c\in R$,所以我們得到 $P(0-0)+P(0-c)+P(c-0)=2P(0+0+c)$,或 $P(0)+P(-c)=P(c)$ 對所有實數 c。設 $c=0$ 則 $P(0)=0$。所以 $P(-c)=P(c)$ 對所有 $c\in R$。因此 P 為偶函數且

$P(x)=a_n x^{2n}+a_{n-1}x^{2x-2}+\ldots\ldots+a_1x^2$ 其中 $a_1\ldots\ldots a_n\in R$。現在我們證明 P 的 $2n$ 次方

至多為 4。

對任何實數 u 和 v,令 $a=uv, b=(1-u)v, c=(u^2-u)v$ 則
$ab+bc+ca=(a+b)c+ab=v(u^2-u)v+uv(1-u)v=0$。此方程式可得
$P((2u-1)v)+P((1-u^2)v)+P((u^2-2u)v)=2P((u^2-u+1)v)$ 對所有 $u,v\in R$。
固定 u,考慮上式為變數 v 的恒等多項式。因等式兩邊的領導係數相等, 所以
$(2u-1)^{2n}+(1-u^2)^{2n}+(u^2-2u)^{2n}=2(u^2-u+1)^{2n}$ 對所有 $u\in R$。
現在,設 $u=-2$,得 $5^{2n}+3^{2n}+8^{2n}=2\cdot 7^{2n}$,可推得 $8^{2n}<2\cdot 7^{2n}$。然而,當 $n=3$ 時,已得到 $8^{2n}>2\cdot 7^{2n}$（$8^{2\cdot 3}>256000>235298=2\cdot 7^{2\cdot 3}$）,且對較大的 n 其值更大。因此 $n\le 2$,其意為對一些 $\alpha,\beta\in R$, $P(x)=\alpha x^2+\beta x^4$。
每一個這樣的多項式皆滿足給定的方程式。為了說明這點,觀察任何解的線性組合也是一個解。所以,只要檢驗 x^2 和 x^4 即可。對 x^2 而言,由
$(a-b)^2+(b-c)^2+-2(a+b+c)^2=-6(ab+bc+ca)$ 可得。對 x^4 而言,令
$x=-a-b$, $y=b-c$, $z=c-a$,要注意的是,藉由檢查 x^2 我們只證明
$x^2+y^2+z^2=2(a+b+c)^2$。因 $x+y+z=0$,故欲求的等式由下式可得到：

$$xy+yz+zx=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)=-(a+b+c)^2,$$

$$(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)=(a+b+c)^4,$$

$$x^4+y^4+z^4=\left(x^2+y^2+z^2\right)-2\left[(xy)^2+(yx)^2+(zx)^2\right]=2(a+b+c)^4\text{。}$$

參考解答（二）：如同解法（一）,首先證明 $P(0)=0$ 且 P 為偶函數。因此存在一實係數多項式 Q,使得 $P(x)=Q(x^2)$,其中 $x\in R$。方程式變為

$Q((a-b)^2)+Q((b-c)^2)+Q((c-a)^2)=2Q((a+b+c)^2)$,其中 $a,b,c\in R$ 且

$ab+bc+ca=0$。已知 $ab+bc+ca=0$,令 $x=a-b, y=b-c, z=c-a$。因 $x+y+z=0$

且 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$,所以我們有

$$x^2+y^2+z^2=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)=2(a^2+b^2+c^2)=2(a+b+c)^2$$

$$(a+b+c)^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)=\frac{1}{2}(x^2+y^2+(-x-y)^2)=x^2+xy+y^2$$

方程式得到 $Q(x^2)+Q(y^2)+Q((x+y)^2)=2Q(x^2+xy+y^2)$。現在設 $y=x$:

$2Q(x^2)+Q(4x^2)=2Q(3x^2)$。　　　　　　（1）

對於 x 的值,可得到（1）式,使得存在 $a,b,c\in R$ 滿足 $x=a-b$, $x=b-c$ 且 $ab+bc+ca=0$ 。但一個簡易的計算顯示,對於每一個實數 x ,存在這樣的 a,b,c :

$a=x+\frac{|x|}{\sqrt{3}}, b=\frac{|x|}{\sqrt{3}}, c=\frac{|x|}{\sqrt{3}}-x$ 。因此,對每一個 $x\in R$,（1）式為真。如此可推得:

對於所有非負的 x , $2Q(x)+Q(4x)=2Q(3x)$,且此種 x 有無限多組。因 Q 是一個多項式,我們可得

對所有 $x\in R$, $2Q(x)+Q(4x)=2Q(3x)$　　　　　　（2）

令 $Q(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0$ 。因（2）為多項式恒等式,比較兩邊的係數,

可得:對於 $i=0.1.......n$, $2b_i+4^ib_i=2\cdot 3^ib_i$ 。因此對於所有

$i=0.1.......n$, $(4^i-2\cdot 3^i+2)b_i=0$ 。且因為 $4^i-2\cdot 3^i+2>0$, $i>2$,可得:所有係數

b_i , $i>2$ 為零。另外 $b_0=0$, $Q(0)=P(0)=0$,所以,對於一些實數

α,β , $Q(x)=\alpha x+\beta x^2$ 。因此, $P(x)=\alpha x^2+\beta x^4$,僅有這樣的證法才是對的。

參考解答(三):對每一實數 x , $(a,b,c)=(6x,3x,-2x)$ 滿足 $ab+bc+ca=0$。因此　對所有 $x\in R$, $P(3x)+P(5x)+P(-8x)=2P(7x)$。

如果 $P(x)=\sum a_i x^i$,則可推得

$i=0,1,2,\ldots$ $(3^i+5^i+(-8)^i-2\cdot 7^i)a_i=0$ 。

對於奇數i,括弧裡面的式子為負,且對$i=0$或對所有大於或等於6的偶數i,括弧裡面的式子為正。所以僅有對$i=2$和$i=4$,括弧裡面的式子為零。因此得到
$P(x)=\alpha x^2+\beta x^4$,其中$\alpha,\beta\in R$。如上所述,僅有這樣的證法才是對的。

莫立平同學的解法：代入$a=b=c=0$得$P(0)=0$故P的常數項係數為0
代入$a=b=0$得$P(0)+P(-c)+P(c)=2P(c)$,即
$P(c)=P(-c),c\in R$,即P是偶函數。
設$P(x)-P(-x)=Q(x)$,則$Q(x)$恆等於0,$x\in R$。若$P(x)$中有一項的
次數是奇數，則設

$$P(x)=\left(a_1x^{2c_1}+a_2x^{2c_1}+\ldots+a_ix^{2c}\right)+\left(b_1x^{2d_1+1}+b_2x^{2d_1+1}+\ldots b_jx^{2d_j+1}\right)$$

其中$c_1,\ldots,c_i,d_1,\ldots,d_j\in \mathrm{N}\cup\{0\},a_1,\ldots a_i,b_1\ldots,b_j\neq 0$,且$j\geq 1$,則

$$Q(x)=\left(a_1x^{2c_1}+\ldots+a_ix^{2c_i}\right)-\left(a_1(-x)^{2c_1}+\ldots+a_i(-x)^{2c_i}\right)+\left(b_1x^{2d_1+1}+\ldots+b_jx^{2d_j+1}\right)$$

$$-\left(b_l(-x)^{2d_1+1}+\ldots+b_j(-x)^{2d_j+1}\right)=2\left(b_1x^{2d_1+1}+\ldots+b_jx^{2d_1+a}\right)$$

此式恆等於0,故矛盾。
故$P(x)$所有的項的次數皆為偶數
若存在$P(x)$,次數≥ 6,使得題目條件成立,設最高次項為

$l_nx^n,\ n\geq 6,l_n\neq 0$

則 設$p'(x)=\dfrac{P(x)}{l_n}$,則$P(x)'$的首項係數為1,而且$P(x)'$亦滿足

題目條件,設$P(x)'$在x^i項的係數為,l_i', $0\leq i<n$

取$a=6\mathrm{N},b=3\mathrm{N},c=-2\mathrm{N},\mathrm{N}>0$
則由$ab+bc+ca=18N^2-6N^2-12N^2=0$,
$P'(a-b)+P'(b-c)+P'(c-a)=2P'(a+b+c)$
即$P'(3N)+P'(5N)+P'(-8N)=2P'(7N)$
即$P'(3N)+P'(5N)+P'(8N)=2P'(7N)$
但 $\lim\limits_{\mathrm{N}\to\infty}\dfrac{P'(8N)-2P'(7N)}{N^n}$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{\left(\left(8N\right)^n+l'_{n-1}\left(8N\right)^{n-1}+\ldots+l'_0\right)-2\left(\left(7N\right)^n+l'_{n-1}\left(7n\right)^{n-1}+\ldots l'_0\right)}{N^n}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{\left(8N\right)^n-2\left(7N\right)^n}{N}=8^n-2\cdot 7^n$$

由於 $8^6>2\cdot 7^6$ 故 $8^n=8^6\cdot 8^{n-6}>2\cdot 7^6\cdot 8^{n-6}\geq 2\cdot 7^6\cdot 7^{n-6}=2\cdot 7^n$

故存在一個正數 M ,使得若 $N\geq M$,則 $P'\left(8N\right)>2P'\left(7N\right)$

而由 $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{P'\left(3N\right)}{N^n}>0$, $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{p'\left(5N\right)}{N^n}>0$,可得存在一個正數 M ,使得若

$N>M$, $P'(3N)>0$ 且 $P'(5N)>0$

故若取 $N>M$,則 $P'(3N)>0,\ P'\left(5N\right)>0,\ P'(8N)>2P'\left(7N\right)$

且 $P'\left(3N\right)+P'\left(5N\right)+P'\left(8N\right)=2P'\left(7N\right)$,這四點相互矛盾了,故不存在 $P(x)$,使得 $P(x)$ 滿足題目條件,且 $P(x)$ 的次數 ≥ 6

綜合以上,滿足條件的 $P(x)$ 必有 $l_4x^4+l_2x^2$ 的形式,檢驗之。

$P(x)=l_4x^4+l_2x^2, ab+bc+ca=0$

$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)-2P(a+b+c)$

$$\begin{aligned}&=l_4(a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4+b^4-4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+c^4+c^4+4ca^2+6c^2a^2\\&\quad-4ca^3+a^4)-2(a^4+b^4+c^4+4a^3b+4a^3c+4ac^3+4ab^3+4bc^3+4b^3c\ +6a^2b^2+6b^2c^2\\&\quad+6c^2a^2+12a^2bc+12ab^2c+12abc^2)\\&\quad+l_2(a^2-2ab+b^2+b^2-2ab+c^2+c^2-2ca+a^2-2a^2-2b^2-2c^2-4ab-4bc-4ca)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\mathrm{l}_4(-12a^3b-12a^3c-12b^3c-12c^3a-12c^3b\\&\quad-6a^2b^2-6b^2c^2-6c^2a^2-24a^2bc-24ab^2c-24abc^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=l_4(a^2(-12ab-12ac-12bc)+b^2(-12ab-12ac-12bc)+c^2(-12ab-12ac-12))\\&=0\end{aligned}$$

故對 $l_4, l_2\in R$ 形如 $l_4x^4+l_2x^2$ 的多項式皆滿足條件,而其餘皆不滿足

第三題:試題委員會公布的參考答案:

參考解答:考慮滿足題意的 $m\times n$ 矩形。對於任意勾形 A,存在唯一勾形 B 利用它末端其中一個正方形覆蓋 A“內部的”正方形。依次,B“內部的”正方形必須被 A“末端的”正方形覆蓋。所以,在每一個正方形的面,所有皆是成對地相符。放置 B 僅有兩種可能性,以致不會與 A 重疊且產生空隙。一種可能是,A 和 B 為 3×4 的矩形;另一種可能是,A 和 B 的結合為一個八邊形的形狀,其邊長為 3,2,1,2,3,2,1,2。

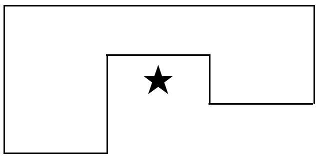
所以一個$m\times n$的矩形能夠被勾形所覆蓋若且唯若此矩形能夠被上面所顯示的 12 個正方形所覆蓋。假設這樣的正方形是存在的；那麼mn可被 12 整除。現在,我們要證明m和n其中一個能被 4 整除。

利用反證法,因mn可被 4 整除,假設m和n都是偶數這種可能是不成立的。想像矩形被分割成邊長為 1 之正方形,其列和行被標記成$1.....m$和$1.....n$。如果i和j其中一個能被 4 整除,則在第(i,j)正方形寫上 1,若i和j皆能被 4 整除,則在第(i,j)正方形寫上 2。因此,在每一列和每一行的正方形數皆為偶數,而被寫下的數目的總和亦為偶數。現在,很容易去檢驗 3×4 的矩形總是用和為 3 或 7 的數目來覆蓋；其他 12 個正方形總是用和為 5 或 7 的數目來覆蓋。因此,12 個正方形的總數為偶數。但mn可被 24 整除,因此,也可被 8 整除,這與先前的假設（m和n都不被 4 整除）相矛盾。

也要注意的是,不是m也不是n能夠是 1,2 或 5（任意試圖沿著邊長為 1,2 或 5 去放置正方形是不成功的）。我們推斷如果某一個正方形是可以的,那麼m和n其中一個可以被 3 整除,另一個可以被 4 整除,且$m,n\notin\{1,2,5\}$。

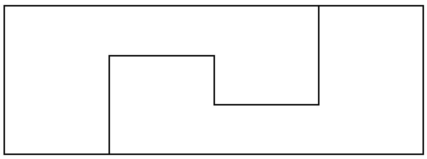
相反地,如果這些狀況能被滿足,正方形是有可能的（而且僅使用 3×4 的矩形）。若 3 除m或 4 除n是直接的（或反之亦然）。讓m被 12 整除且$n\notin\{1,2,5\}$（或反之亦然）。而n可被聲稱是好幾個 3 的和好幾個 4 的之總和。因此,此矩形可被分割成$m\times 3$和$m\times 4$的矩形,且利用 3×4 的正方形就可以容易的去覆蓋。

蔡政江同學的解法：首先注意勾形中間的那格

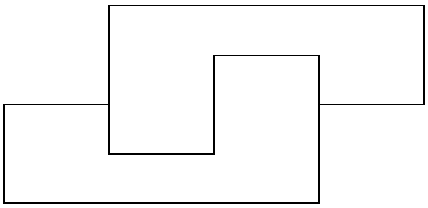


必須被填滿,

這只有兩種可能：

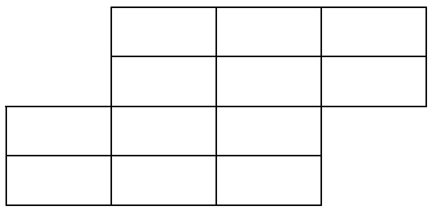


或



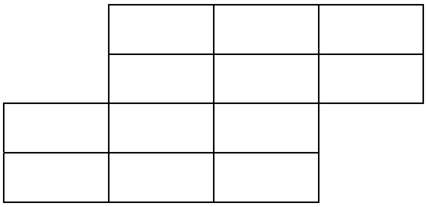
因此本題等價於考慮用

和

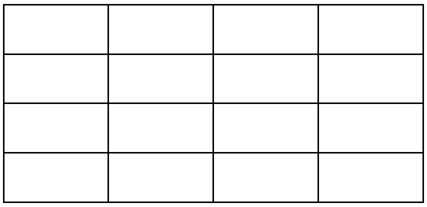


填滿矩形。

由於



和



的大小是 12,故若 12 不為 mn 之因式則不能填滿

若 $12|mn$,不失一般性可設 $3|m$

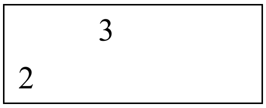
若 2 不為 m 之因式,則 $4|n$,此時 $m\times n$ 可分割成 $\frac{m}{3}\times\frac{n}{4}$ 個 3×4 矩形,故可填滿

若 $2|m$,4 不為 m 之因式,則 $2|n$,若 $4|n$ 則同理可填滿,若 4 不為 n 之因式,此時 $n\equiv m\equiv2\pmod 4$

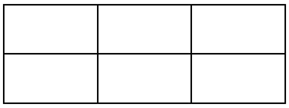
注意

和

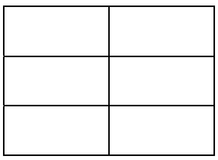
都可化為兩個



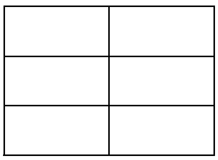
故 整個圖形可看成由



構成,對任意 $k=2,\ldots\ldots,m-1$



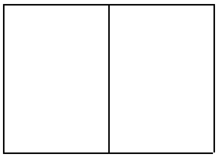
和



k 行 k-1 行 k 行 k+1 行

是唯一能使第 k 行的格數增加奇數格的方法,又 $m\equiv n\equiv2\pmod 4\Rightarrow$ 每一行都是偶數格,故上兩種情形同奇或同偶數次

假設


有奇數個，則每兩行的


1 行　2 行

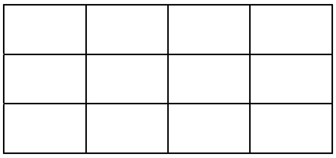
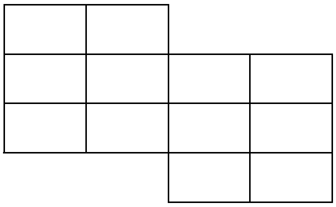
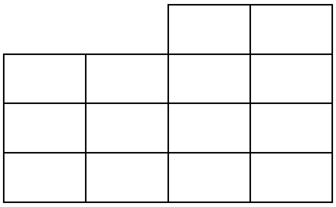
都有奇數個,由於行有 m-1 種,故可得

所有

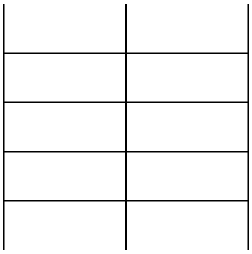

的個數=m-1 個奇數相加=奇數,矛盾,因 2 個


構成一個真正的元素,故任兩行的


都是偶數個,考慮

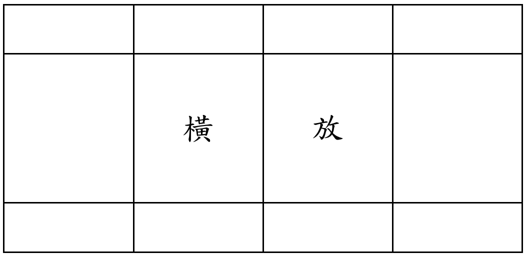




三種橫放在每四行的個數。可知，



k 行　k+1 行

令 a_k 表上圖的個數



k 行　k+3 行

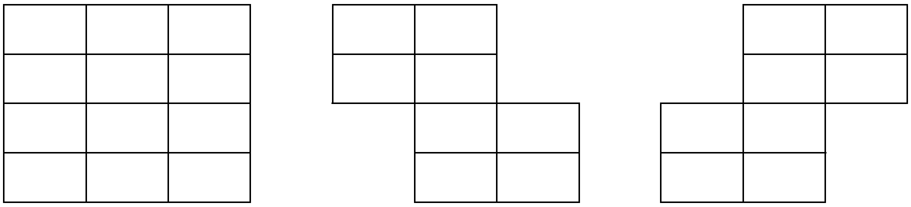
b_k 橫放（上圖的其中一種）的個數，有

$a_1 = b_1$，$a_2 = b_2$，$a_{k+2} = b_k + b_{k+2}$ $\quad k = 1,2,3,......,m-3$

$a_{m\text{-}2} = b_{m-4}$，$a_{m-1} = b_{m-3}$ 而 $a_1 \equiv a_2 \equiv \ldots \equiv a_{m-1} \equiv l \pmod 2$

故顯然有 $b_1 \equiv b_2 \equiv \ldots \equiv b_{m-3} \equiv 0 \pmod 2$

（by induction 易證）,於是橫放有偶數種,同理



亦共有偶數個,故共有偶數個（大小為 12 的圖形）其面積和被 8 整除

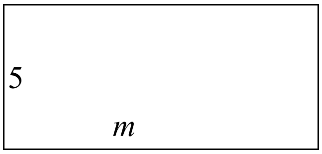
但 $n \equiv m \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow 8$ 不為 nm 之因式,矛盾。故這樣的矩形不能被勾形填滿。

最後若 $4|m$,由於大於 5（4×3-4-3=5）的個數都可能表成 $3a + 4b(a, b \in \mathrm{N})$

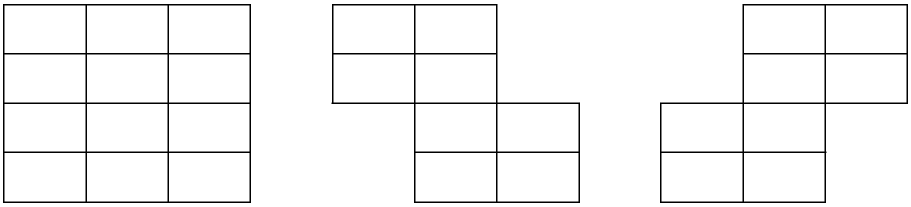
故當 $n > 5$ 時都可分成 $m \times 3a$ 和 $m \times 4b$ 而分別填滿

同樣地 $n = 3$ 或 4 時亦可用同法填滿，$n = 1,2$ 時顯然不可能

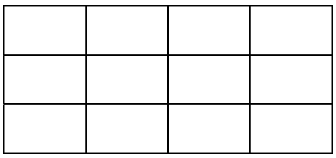
若 $n = 5$,注意



中不能放入任何



之類,否則會產生過窄的區域但只由



顯然不能達成 $5 \times m$,故 $5 \times m$ 無法由勾形拼成

至此已窮舉完畢, $m \times n$ 可已被勾形填滿 iff

（1）$3 | n, 4 | n$ or （2）$12 | m, n \neq 1,2,5$ or （3）$4 | m, 3 | n$ or （4）$m \neq 1,2,5, 12 | n$

（未完待續）