第 44 屆國際數學奧林匹亞競賽試題與參考解答

傅承德* 洪文良**
*中央研究院　統計科學研究所
**國立新竹師範學院　數學教育系

2003 年第 44 屆國際數學奧林匹亞競賽(IMO)是在日本的東京舉行；本屆共有 82 個國家與會，合計 457 位學生代表參賽。競賽活動是由各國領隊組成的評審會議 (Jury Meeting)揭開序幕，除了確認各項議題外，評審會議的一個主要工作是挑選本屆的競賽試題。國際數學奧林匹亞競賽試題是先由各參賽國(主辦國除外)於規定時間期限內提交 0~6 道試題，再由主辦國的試題委員會(Problem Selection Committee)研究選出大約 30 道預選試題，分屬代數、分析、數論、幾何及組合數學等不同領域和不同難度的試題；最後再經由評審會議票選暨修訂出最後 6 道 IMO 試題，再依主題內容及難易層次分配成兩份試題，分別在連續的兩天舉行競試，每天三道試題，考試時間都是 4.5 小時。本屆試題經由主辦國的試題委員會選出他們認為較適當的 27 道試題，再由各國領隊組成的評審會議經過三天的討論票選出一道代數題、二道數論題、二道幾何題及一道組合題，其中第一題為組合題、第二題為數論題、第三題為幾何題、第四題為幾何題、第五題為代數題、第六題為數論題。

今年我國六位學生：林金毅（建國中學）、趙心宇（建國中學）、黃紹倫（建國中學）、黃道生（建國中學）、廖紹棠（高雄中學）、葉仲恆（鳳西國中），總成績 114 分，榮獲一面金牌、二面銀牌、二面銅牌，在 82 隊中名列第十六名。總分前二十名的國家依次為：保加利亞、中國大陸、美國、越南、俄羅斯、韓國、羅馬尼亞、土耳其、日本、匈牙利、英國、加拿大、哈薩克、烏克蘭、印度、台灣、德國、伊朗、泰國、白俄羅斯。本文針對此次我國代表團所翻譯成中文版的六道 IMO 試題提供參考解答，以供國內相關學者、數學教師等輔導數學資優生之研究、應用與參考。

一、第 44 屆國際數學奧林匹亞競賽試題

第一天

東京，2003 年 7 月 13 日

考試時間：4.5 小時

第一題：

令 $S=\{1,2,\cdots,1000000\}$，而 A 是一個恰有 101 個元素的 S 的子集合。試證，在 S 中存在著 $t_1,t_2,\cdots,t_{100}$ 使得下面的這些集合

$$A_j=\left\{x+t_j \mid x\in A\right\},\ j=1,2,\cdots,100$$

任何相異的兩個都不相交。

第二題：

求所有能使 $\dfrac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ 成爲正整數的正整數對 (a,b)。

第三題：

凸六邊行的任何兩個對邊都有下面的性質：兩對邊中點間的距離恰等於這兩個對邊長的和的 $\sqrt{3}/2$ 倍。試證這六邊形的所有內角都相等。

(一個凸六邊形 $ABCDEF$ 有三組對邊：AB 和 DE ；BC 和 EF 以及 CD 和 FA)

第二天

東京，2003年7月14日

考試時間：4.5小時

第四題：

設 $ABCD$ 爲一個圓內接四邊形，自點 D 向直線 BC ，CA 和 AB 做垂線，設垂足分別爲 P ，Q 和 R 。試證 $PQ=QR$ 的充分必要條件是：$\angle ABC$ 的分角線，$\angle ADC$ 的分角線和 AC 這三線交於一點。

第五題：

設 n 爲一個正整數且 $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ 均爲實數。試證

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_i-x_j\right|\right)^2 \le \frac{2\left(n^2-1\right)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i-x_j\right)^2$$

證明上式中等號成立的充分必要條件是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 爲一個等差序列。

第六題：

設 p 爲一個質數。試證：存在一個質數 q ，使得對所有的整數 n, n^p-p 都不能被 q 整除。

二、第44屆國際數學奧林匹亞競賽成績統計

表 1. 2003 年第 44 屆 IMO 前 20 名國家各國成績統計表

名次	國名	總分	金牌	銀牌	銅牌	參賽人數
1	保加利亞	227	6	0	0	6
2	中國大陸	211	5	1	0	6
3	美國	188	4	2	0	6
4	越南	172	2	3	1	6
5	俄羅斯	167	3	2	1	6
6	韓國	157	2	4	0	6
7	羅馬尼亞	143	1	4	1	6
8	土耳其	133	1	3	1	6
9	日本	131	1	3	2	6
10	匈牙利	128	1	3	1	6
10	英國	128	1	2	3	6
12	加拿大	119	2	0	3	6
12	哈薩克	119	1	2	2	6
14	烏克蘭	118	1	2	3	6
15	印度	115	0	4	1	6
16	台灣	114	1	2	2	6
17	德國	112	1	2	1	6
17	伊朗	112	0	3	2	6
19	泰國	111	1	1	3	6
19	白俄羅斯	111	1	2	2	6

表 2. 2003 年第 44 屆 IMO 中華民國學生代表得分及成績統計表

姓名	第1題	第2題	第3題	第4題	第5題	第6題	總分	獎牌
黃紹倫	7	7	0	7	7	1	29	金牌
葉仲恆	7	3	0	7	4	0	21	銀牌
黃道生	2	3	0	7	7	1	20	銀牌
趙心宇	7	3	0	7	1	0	18	銅牌
林金毅	7	3	0	7	0	0	17	銅牌
廖紹棠	2	0	0	0	7	0	9	榮譽獎

三、第 44 屆國際數學奧林匹亞競賽試題詳解

第一題：

令 $S=\{1,2,\cdots,1000000\}$，而 A 是一個恰有 101 個元素的 S 的子集合。試證，在 S 中存在著 $t_1,t_2,\cdots,t_{100}$ 使得下面的這些集合

$$A_j=\left\{x+t_j \mid x\in A\right\},\ j=1,2,\cdots,100$$

任何相異的兩個都不相交。

試題委員會公布的參考答案：

參考解答：考慮集合 $D=\left\{x-y \mid x,y\in A\right\}$，

則集合 D 的元素個數至多有 $101\times100+1=10101$ 個。因爲兩個集合 $A+t_i$ 與 $A+t_i$ 具有非空交集的充分必要條件爲 $t_i-t_j\in D$。所以我們僅需要依照此想法選取 100 個元素即可。

我們以數學歸納法選取這些元素。由 S 中任取一個元素。假設我們已選取 k 個元素，此處 $k\le 99$。(此 k 個元素選取的方式爲：任一元素 x 已被選取，則我們不能從集合 $x+D$ 選取另外一個元素。)

在 k 個元素被選取之後，則 S 中至多有 999999(因爲 $10101k\le 999999$)個元素不能被選取。因此，我們可以再選取下一個元素。

推廣結果：令 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，且 m 是一個正整數使得 $n>(m-1)\left(\binom{k}{2}+1\right)$，而 A 是一個恰有 k 個元素的 S 的子集合。試證，在 S 中存在著 $t_1,t_2,\cdots,t_m$ 使得下面的這些集合

$$A_j=\left\{x+t_j \mid x\in A\right\},\ j=1,2,\cdots,m$$

任何相異的兩個都不相交。

參考解答：考慮集合 $B=\left\{|x-y| \mid x,y\in A\right\}$，

則集合 B 的元素個數至多有 $\binom{k}{2}+1$ 個。

我們僅需要證明：在 S 中存在著 $t_1,t_2,\cdots,t_m$ 使得 $\left|t_i-t_j\right|\notin B,\ i\ne j$。

底下我們以數學歸納法選取 $t_1,t_2,\cdots,t_m$。在 S 中選取一個元素 $t_1=1$ 且考慮集合 $C_1=S\setminus(B+t_1)$。則 $|C_1|\ge n-\left(\binom{k}{2}+1\right)>(m-2)\left(\binom{k}{2}+1\right)$。

對於 $1\le i<m$，假設 $t_1,t_2,\cdots,t_i$ 已被選取且 C_i 已被定義，$\left|C_i\right|>(m-i-1)\left(\binom{k}{2}+1\right)\ge 0$。因此，我們可由集合 C_i 選取一個最小元素 t_{i+1} 而且考慮集合 $C_{i+1}=C_i\setminus\left(B+t_{i+1}\right)$。則

$$|C_{i+1}|\ge|C_i|-\left(\binom{k}{2}+1\right)>(m-i-2)\left(\binom{k}{2}+1\right)\ge 0$$

依照上述的方式，我們可選取符合題意的 $t_1,t_2,\cdots,t_m$。

林金毅同學的解法：

由題意設

$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{101} \mid 1\le a_1<a_2<a_3<\cdots<a_{101}\le 1000000\}$。定義 1000000 個集合：$A(p)=\left\{x+p \mid x\in A\right\}$，其中 p 屬於 S，則在 S 中選出滿足題設條件的 $t_1,t_2,\cdots,t_{100}$ 即是從以上定義出的 1000000 個集合中選出 100 個集合使得兩兩沒有交集。

而對每一個 p，$A(p)$ 至多有 $\binom{101}{2}=5050$ 個 $p'>p$ 使得 $A(p)$ 和 $A(p')$ 的交集是非空。此因而這必然是存在一對 $u>v$ 屬於 $\{1,2,\cdots,101\}$ 使得 $A(p)$ 的第 u 個元素和 $A(p')$ 的第 v 個元素相同而對於每一對 $u>v$ 屬於 $\{1,2,\cdots,101\}$ 恰有一 $p'>p$ 使得 $a_u+p'=a_v+p$ 或 $a_u+p=a_v+p'$ 成立。（事實上，若 $u<v$ 則 $a_u+p=a_v+p'$ 不可能成立）由於這樣 u,v 共有 5050 組，所以這樣的 p' 也至多有 5050 個。

把 $A(1),A(2),\cdots,A(1000000)$ 排列起來選，現逐次選取 t_1,t_2,t_{100}：$t_1=1,t_{n+1}=$ 選完 t_n 後可以選的最小數。其中 t_n 不可以選的就是 $A(t_n)$ 會和之前選出的某 $A(t_k)$ 的交集非空。於是只在每次選完 t_n 時把那些會和他有交集的集合 $A(t'_n)$（至多有 5050 個）和 $A(t_n)$（合起來至多有 50501 個）從可以選的範圍去掉再選就沒有問題了。底下證明：對所有 $n\le 100$，可以選出 t_n.

我們利用反證法，假設不然。則由以上選法知：選完了 t_{n-1} 以後，從 $1,2,\cdots,1000000$ 共 1000000 都不可以選了。但是選了 $n-1$ 次最多排除了 $5051(n-1)\le 5051\times 99<1000000$ 可以選。矛盾。

所以 $t_1,t_2,\cdots,t_{100}$ 都選出來了，這些 $t_1,t_2,\cdots,t_{100}$ 根據選法確實滿足題意。

第二題：

求所有能使 $\dfrac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ 成爲正整數的正整數對 (a,b)。

試題委員會公布的參考答案：

參考解答：令 (a,b) 是滿足題意的一個序對。因

$$k=\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}>0$$

$$\Rightarrow\quad 2ab^2-b^3+1>0,\ a>\frac{b}{2}-\frac{1}{2b^2}$$

$$\Rightarrow\quad a\ge\frac{b}{2}$$

根據上式，可得 $k\ge$ 或

$a^2\ge b^2(2a-b)+1,(\Rightarrow a^2>b^2(2a-b)\ge 0$.

因此Equation Section (Next)

$$a>b\quad\text{or}\quad 2a=b \qquad (1)$$

對於固定正整數 k 和 b，考慮方程式

$$a^2-2kb^2a+k\left(b^3-1\right)=0 \qquad (2)$$

的兩根 a_1,a_2 (假設 $a_1\ge a_2$)。由根與係數關係知：$a_1+a_2=2kb^2,a_1a_2=k\left(b^3-1\right)$。

根據上述，我們可得：

$$a_1\ge kb^2>0,\ 0\le a_2=\frac{k\left(b^3-1\right)}{a_1}\le\frac{k\left(b^3-1\right)}{kb^2}<b.$$

結合(1)式可得：$a_2=0$ 或 $a_2=\dfrac{b}{2}$ (此處 b 必爲偶數)。

(i)若 $a_2=0$ 則 $b^3-1=0$。因此 $a_1=2k,b=1$。

(ii)若 $a_2=\frac{b}{2}$ 則 $k=\frac{b^2}{4}$ 且 $a_1=\frac{b^4}{2}-\frac{b}{2}$ 。

由上述的討論可知滿足題意的序對 (a,b) 爲：對於某個正整數 ℓ

$(a,b)=(2\ell,1)$ 或 $(\ell,2\ell)$ 或 $(8\ell^4-\ell,2\ell)$.

註解 1：(1)式的另一種解法：固定 $a\geq 1$ 且考慮方程式 $f_a(b)=2ab^2-b^3+1$。則 $f_a(b)$ 在區間 $\left[0,\frac{4a}{3}\right]$ 是遞增函數，在區間 $[\frac{4a}{3},\infty)$ 是遞減函數。由此可得

$$\begin{aligned} f_a(a) &= a^3+1>a^2,\\ f_a(2a-1) &= 4a^2-4a+2>a^2,\\ f_a(2a+1) &= -4a^2-4a<0. \end{aligned}$$

因此，若 $b\geq a$ 且 $\frac{a^2}{f_a(b)}$ 是一個正整數則 $b=2a$ 。

若 $a\leq b\leq \frac{4a}{3}$ 則 $f_a(b)\geq f_a(a)>a^2$ 且 $\frac{a^2}{f_a(b)}$ 不是一個正整數。（矛盾）

若 $b>\frac{4a}{3}$ 則

(i)若 $b\geq 2a+1$ 則 $f_a(b)\leq f_a(2a+1)<0$（矛盾）；

(ii) 若 $b\leq 2a-1$ 則 $f_a(b)\geq f_a(2a-1)>a^2$ ，且 $\frac{a^2}{f_a(b)}$ 不是一個正整數。（矛盾）

註解 2：此題有很多種解法，底下列出其中三種。

解法（一）：令 D 爲方程式(2)的判別式，則 D 是某個非負整數 d 的平方，即

$$D=\left(2b^2k-b\right)^2+4k-b^2=d^2.$$

(i) 若 $e=2b^2k-b=d$ ，則 $4k=b^2$ 且 $a=2b^2k-\frac{b}{2},\frac{b}{2}$.

(ii)若 $e\neq d$ ，則

$$\left|d^2-e^2\right|\geq 2e-1\Rightarrow\left|4k-b^2\right|\geq 4b^2k-2b-1.$$

(iii)若 $4k-b^2>0$ ，則 $b=1$ 。

其他情形是無解。

解法（二）：假設 $b\neq 1$ 且令 $s=\gcd\left(2a,b^3-1\right)$, $2a=su, b^3-1=st'$, $2ab^2-b^3+1=st$.則 $t+t'=ub^2$ 且 $\gcd(u,t)=1$。由 $st\mid a^2$ ，可得 $t\mid s$ 令 $s=rt$.則原問題可簡化成底下的引理：

引理：令 b,r,t,t',u 是滿足 $b^3-1=rtt'$ 與 $t+t'=ub^2$ 的正整數。則 $r=1$ 且 t,t',u 三數之中有一爲1。

證明：由 $b^3-1=rtt'$ 與 $t+t'=ub^2$ 可得 $b^3-1=rt\left(ub^2-t\right)=rt'\left(ub^2-t\right)$ 。

因 $rt^2\equiv rt'^2\equiv 1\left(\bmod b^2\right)$ ，若 $rt^2\neq 1$ 且 $rt'^2\neq 1$，則 $t,t'>\frac{b}{\sqrt{r}}$ 。我們可得

$$r\frac{b}{\sqrt{r}}\left(ub^2-\frac{b}{\sqrt{r}}\right)\geq b^3-1,$$ 除非 $r=u=1$.

解法（三）：我們沿用上述的符號，因 $rt^2\mid\left(b^3-1\right)^2$,所以僅需要證明底下的引理：

引理：令 $b \geq 2$。若一正整數 $x \equiv 1 \pmod{b^2}$ 能被 $\left(b^3-1\right)^2$ 整除，則 $x=1$ 或 $x=\left(b^3-1\right)^2$ 或 $(b,x)=(4,49)$ 或 $(4,81)$。

證明：令 p,q 是正整數具有 $p>q>0$ 且滿足 $\left(b^3-1\right)^2=\left(pb^2+1\right)\left(qb^2+1\right)$。則

$$
\begin{aligned}
& b^4 = 2b+p+q+pqb^2 \\
\Rightarrow\ & \left(q\left(pq-b^2\right)+1\right)b^4 = p-(q+2b)\left(qb^2-1\right) \\
\Rightarrow\ & -3<\frac{p-(q+2b)\left(qb^2-1\right)}{b^4}<1.
\end{aligned}
$$

根據上述，可得證。

趙心宇同學的解法：設 $\dfrac{a^2}{2ab^2-b^3+1}=k$，$a^2-2kb^2a+b^3k-k=0$，視爲 a 的二次方程式，因爲 a 是整數，所以判別式必須是一個完全平方數。由 $\triangle=4\left(k^2b^4-b^3k+k\right)$，而 4 是一個完全平方數，故 $k^2b^4-b^3k+k=m^2$，其中 m 是自然數。但是當 b 爲偶數時易得不等式：

$$\left(kb^2-\frac{b}{2}+1\right)^2>k^2b^4-b^3k+k=\left(kb^2-\frac{b}{2}\right)^2+k-\frac{b^2}{4}>\left(kb^2-\frac{b}{2}-1\right)^2$$

故必有

$$k^2b^4-b^3k+k=\left(kb^2-\frac{b}{2}\right)^2+k-\frac{b^2}{4}=\left(kb^2-\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow k=\frac{b^2}{4}.$$

若 b 是奇數，

$$\left(kb^2-\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\right)^2>k^2b^4-b^3k+k=\left(kb^2-\frac{b}{2}\right)^2+k-\frac{b^2}{4}>\left(kb^2-\frac{b}{2}-\frac{1}{2}\right)^2$$

上述不等式成立的條件是 $b=1$，故 b 不可能是大於 1 的奇數。

(i) $b=1$ 時，必有 $a=2k$。所以 $(2k,1)$ 是其中一組解。

(ii) b 偶數時，將 $k=\dfrac{b^2}{4}$ 代入，得出：

$$a=\frac{2kb^2\pm\sqrt{\triangle}}{2}=kb^2\pm\left(kb^2-\frac{b}{2}\right)=\frac{b}{2},\frac{b^4-b}{2}$$

帶入驗證皆合乎條件。

故滿足題意的所有解爲：

$$(2k,1)\left(\frac{b}{2},b\right)\left(\frac{b^4-b}{2},b\right).$$

第三題：

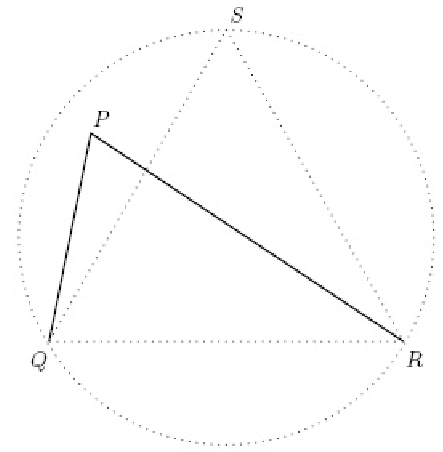
凸六邊行的任何兩個對邊都有下面的性質：兩對邊中點間的距離恰等於這兩個對邊長的和的 $\sqrt{3}/2$ 倍。試證這六邊形的所有內角都相等。

(一個凸六邊形 $ABCDEF$ 有三組對邊：AB 和 DE；BC 和 EF 以及 CD 和 FA)

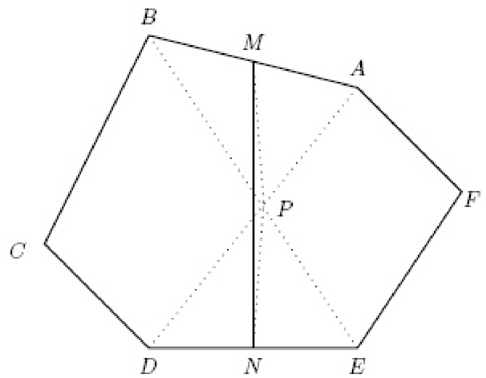
試題委員會公布的參考答案：

參考解答（一）：首先我們先證底下的一個引理：

引理：考慮一個三角形 PQR 其中 $\angle QRP \geq 60^\circ$。令 L 是 QR 的中點。則 $PL \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}QR$，此處等號成立的充分必要條件是三角形 PQR 爲正三角形。



證明：令 S 是使得三角形 QRS 為正三角形的一個點，此處 P 點與 S 點在 QR 的同一側。則 P 點落在三角形 QRS 的外接圓之內部。同時，P 點也落在以 L 為中心，$\frac{\sqrt{3}}{2}QR$ 為半徑的圓內。故得證。



因為凸六邊行的主對角線可形成一個三角形（此三角形可能是退化的），所以我們可選取其中的兩條主對角線使其形成的角大於或等於 60°。不失其一般性，我們可假設凸六邊行 $ABCDEF$ 的兩條主對角線 AD 與 BE 滿足 $\angle APB \geq 60^\circ$，此處 P 點是主對角線 AD 與 BE 的交點。根據上述引理，可得：

$$MN = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(AB+DE\right) \geq PM+PN \geq MN,$$

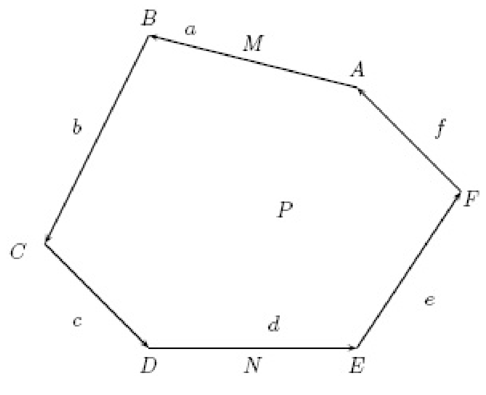
此處 M 與 N 分別是 AB 與 DE 的中點。所以三角形 ABP 與 DEP 是正三角形。

另一方面，主對角線 CF 與 AD 或 BE 可形成一個大於或等於 60° 的角。不失其一般性，我們可假設此角為 $\angle AQF \geq 60^\circ$，其中 Q 是主對角線 AD 與 CF 的交點。依上述的方法，我們可得：三角形 AQF 與 CQD 是正三角形。由此可知：$\angle BRC = 60^\circ$，其中 R 是主對角線 BE 與 CF 的交點。再依據上述的作法，可得：三角形 BCR 與 EFR 是正三角形。

故得證。

參考解答（二）：

令 $ABCDEF$ 為一給定的凸六邊形且 $a=\overrightarrow{AB}, b=\overrightarrow{BC}, \cdots, f=\overrightarrow{FA},$。



Equation Section (Next)

令 M, N 分別為 AB 與 DE 的中點，則

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}a+b+c+\frac{1}{2}d$ 和 $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}a-f-e-\frac{1}{2}d.$

所以

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(b+c-e-f\right). \qquad (1)$$

根據題意，可得

$$\overrightarrow{MN}=\frac{\sqrt{3}}{2}(|a|+|d|)\geq\frac{\sqrt{3}}{2}|a-d|. \quad (2)$$

令 $x=a-d, y=c-f, z=e-b$ 。由(1)與(2)，可得

$$|y-z|\geq\sqrt{3}|x|. \quad (3)$$

同理可得

$$|z-x|\geq\sqrt{3}|y|. \quad (4)$$

$$|x-y|\geq\sqrt{3}|z|. \quad (5)$$

觀察得

$$\begin{aligned}(3) &\Leftrightarrow |y|^2-2yz+|z|^2 \geq 3|x|^2,\\ (4) &\Leftrightarrow |z|^2-2zx+|x|^2 \geq 3|y|^2,\\ (5) &\Leftrightarrow |x|^2-2xy+|y|^2 \geq 3|z|^2.\end{aligned}$$

由上式可得

$$-|x|^2-|y|^2-|z|^2-2yz-2zx-2xy\geq 0,$$

或$-|x+y+z|^2\geq 0.$

因此，我們可得

$$x+y+z=0$$

$$\begin{aligned}|y-z|&=\sqrt{3}|x|, \qquad a\parallel d\parallel x,\\ |z-x|&=\sqrt{3}|y|, \qquad c\parallel f\parallel y,\\ |x-y|&=\sqrt{3}|z|, \qquad e\parallel b\parallel z,\end{aligned}$$

假設 PQR 是一個三角形使得 $\overrightarrow{PQ}=x,\overrightarrow{QR}=y,\overrightarrow{RP}=z$ 。不失其一般性，我們可假設$\angle QPR\geq 60^\circ$。令L爲QR的中點，則 $PL=\frac{|z-x|}{2}=\frac{\sqrt{3}|y|}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}QR$ 。根據解法(一)，可知：PQR是一個正三角形。所以$\angle ABC=\angle BCD=\cdots=\angle FAB=120^\circ$。

黃道生同學的解法：如圖（一），考慮三角形 ABC 及 AB 的中點 M 。考慮 CM 的長度與角 C 的關係，此處以 C 代表角 C 的大小。下證:

Equation Section (Next)

引理一：當 $C>60^\circ, CM<\frac{\sqrt{3}}{2}AB$ 。

由餘弦定律知：

$$\begin{aligned}&AC^2+BC^2=AB^2+2AC\cdot BC\cos C<AB^2+2AC\cdot BC\cos 60^\circ\\ \leq\ &AB^2+\frac{AC^2+BC^2}{2}\end{aligned} \quad (1)$$

所以 $AC^2+BC^2<2AB^2$ 。再由中線定理知：$4CM^2+AB^2=2AC^2+2BC^2<4AB^2$。所以$4CM^2<3AB^2\Rightarrow CM<\frac{\sqrt{3}}{2}AB$ 。

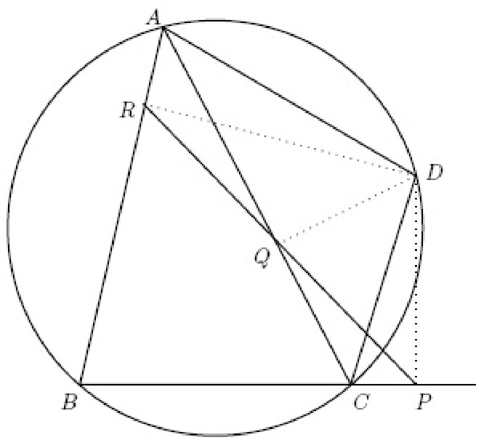
如圖（二）：設凸六邊形 $ABCDEF$ ，M,N 分別爲 AB,DE 之中點，P 爲對角線 AD,BE 之交點。若$\angle APB>60^\circ$，則由引理一及三角不等式可得：$MN\leq MP+NP<\frac{\sqrt{3}}{2}(AB+DE)$，此與題設不合，所以，$\angle APB\leq 60^\circ$（引理二）。

主證明：如圖（三），由引理（二）：$\angle APB,\angle FQE,\angle CRD$ 全都小於或等於 60°。但，顯然這三個角的和爲180°（不論有沒有退化）。所以，$\angle APB=\angle FQE=\angle CRD=60^\circ$。由引理

一的證明中(1)式可知：若$\angle APB=60^{\circ}$而不等號必須成爲等號（在引理一中，$CM=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$），必須$AC=CB$，因爲M爲中點所以CM垂直AB。而且CM爲角C的平分線。現在有$\angle APB,\angle CRD$的平分線，互相夾角爲120°，AB垂直$\angle APB$之平分線，AF垂直$\angle CRD$之平分線，而且$ABCDEF$爲凸六邊形。所以$\angle BAF=120^{\circ}$。同理可得凸六邊形$ABCDEF$的每個角都是120°，故每個角都相等。

第四題：

設$ABCD$爲一個圓內接四邊形，自點D向直線BC，CA和AB做垂線，設垂足分別爲P，Q和R。試證$PQ=QR$的充分必要條件是：$\angle ABC$的分角線，$\angle ADC$的分角線和AC這三線交於一點。



試題委員會公布的參考答案：

參考解答（一）：由 Simson 定理知P,Q,R三點共線。因$\angle DPC$與$\angle DQC$爲直角且D,P,Q,C四點共圓，所以$\angle DCA=\angle DPQ=\angle DPR$。同理，$D,Q,R,A$四點共圓，所以$\angle DAC=\angle DRP$。因此$\triangle DCA\sim\triangle DPR$。同理可證：

$\triangle DAB\sim\triangle DQP$與$\triangle DBC\sim\triangle DRQ$。則

$$\frac{DA}{DC}=\frac{DR}{DP}=\frac{DB\cdot\frac{QR}{BC}}{DB\cdot\frac{PQ}{BA}}=\frac{QR}{PQ}\cdot\frac{BA}{BC}.$$

故$PQ=QR$充分必要條件是$\frac{DA}{DC}=\frac{BA}{BC}$。由此可得證。

參考解答（二）：假設$\angle ABC$的分角線與$\angle ADC$的分角線分別與AC交於L與M兩點。因爲

$$\frac{AL}{CL}=\frac{AB}{CB}\quad\text{與}\quad\frac{AM}{CM}=\frac{AD}{CD.}$$

所以，$\angle ABC$的分角線，$\angle ADC$的分角線和AC這三線交於一點的充分必要條件是$\frac{AB}{CB}=\frac{AD}{CD}$，即$AB\cdot CD=CB\cdot AD$。底下，我們將證明：$AB\cdot CD=CB\cdot AD$的充分必要條件是$PQ=QR$。

因爲$DP\perp BC,DQ\perp AC,DR\perp AB$所以我們有：(i)以$DC$爲直徑的圓包含了$P,Q$兩點；(ii) 以$DA$爲直徑的圓包含了$Q,R$兩點。因此，$\angle PDQ=\gamma$或$180^{\circ}-\gamma$，其中$\gamma=\angle ACB$。同理可得：$\angle QRD=\alpha$或$180^{\circ}-\alpha$，其中$\alpha=\angle CAB$。由正弦定律，可得

$$PQ=\sin\gamma\quad\text{與}\quad QR=AD\sin\alpha.$$

所以，$PQ=QR$ 的充分必要條件是 $\frac{CD}{AD}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$.

另一方面，再由正弦定律，可得：$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=\frac{CB}{AB}$.。所以，$PQ=QR$ 的充分必要條件是 $\frac{CD}{AD}=\frac{CB}{AB}$，即 $AB\cdot CD=CB\cdot AD$。

葉仲恆同學的解法：

(i) 設 $\angle ADC,\angle ABC$ 之角平分線分別交 AC 於 F 與 f 兩點。由角平分線定理知：

$$\frac{DC}{DA}=\frac{CF}{FA},\frac{BC}{BA}=\frac{Cf}{fA}.$$

$\angle ADC,\angle ABC$ 之角平分線和 AC 三線共點的充分必要條件是 F 與 f 兩點重合。所以 $\angle ADC,\angle ABC$ 之角平分線和 AC 三線共點的充分必要條件是 $\frac{DC}{DA}=\frac{BC}{BA}$。

(ii)由於 $\angle DRC=\angle DQC=90^\circ,\angle DQA+\angle DPA=180^\circ$，可知 $DRCQ,DQPA$ 四點共圓。又 DR,DA 分別在 $DRCQ,DQPA$ 的外接圓對 90° 的圓周角，可知 DR,DA 分別是 $DRCQ,DQPA$ 的外接圓的直徑。由正弦定律知：

$RQ=DC\sin\angle RDQ,PQ=DA\sin\angle PDQ.$

再由 $DRCQ,DQPA$ 四點共圓，可知：$\angle RDQ=\angle BCA,\angle PDQ=\angle BAC,$，即 $RQ=DC\sin\angle BCA,PQ=DA\sin\angle BAC.$

所以 $\frac{RQ}{PQ}=\frac{\sin\angle BCA}{\sin\angle BAC}.$

(iii)由正弦定律知：$\frac{BC}{BA}=\frac{\sin\angle BCA}{\sin\angle BAC}$，推得

$$\frac{DC}{DA}=\frac{BC}{BA}=\frac{\sin\angle BCA}{\sin\angle BAC}\Leftrightarrow DC\sin\angle BCA=DA\sin\angle BAC\Leftrightarrow PQ=RQ.$$

所以，$\angle ADC,\angle ABC$ 之角平分線和 AC 三線共點的充分必要條件是 $PQ=RQ$。

第五題：

設 n 爲一個正整數且 $x_1\le x_2\le\cdots\le x_n$ 均爲實數。

試證

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_i-x_j\right|\right)^2\le\frac{2\left(n^2-1\right)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i-x_j\right)^2$$

證明上式中等號成立的充分必要條件是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 爲一個等差序列。

試題委員會公布的參考答案：

參考解答：(1) 因不等式兩邊對於 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的任意變換是不變的，所以在不失一般性的情況下我們可假設 $\sum_{i=1}^{n}x_i=0$。經簡單計算後可得

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left|x_i-x_j\right|=2\sum_{i<j}\left(x_i-x_j\right)=2\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_i.$$

由 Cauchy-Schwartz 不等式可得

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}\left|x_i-x_j\right|\right)^2\le 4\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)^2\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}=4\cdot\frac{n(n+1)(n-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}.$$

另一方面，我們有

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(x_i-x_j\right)^2=n\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}x_j+n\sum_{j=1}^{n}x_j^{\,2}=2n\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}.$$

因此

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_i-x_j\right|\right)^2\le\frac{2\left(n^2-1\right)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i-x_j\right)^2.$$

(2)如果等式成立，則 $x_i = k(2i-n-1)$，對於某個 k，其意爲 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是一個等差數列。

另一方面，假設 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是一個具有公差爲 d 的等差數列。則我們可得

$$x_i = \frac{d}{2}(2i-n-1) + \frac{x_1+x_n}{2}.$$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 經由 $-\frac{x_1+x_n}{2}$ 的變換可得 $x_i = \frac{d}{2}(2i-n-1)$ 與 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$。由此可得等號成立。

Equation Section (Next)

廖紹棠同學的解法：

因 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j| = 2\sum_{1\le i<j\le n}|x_i - x_j|$，所以原命題可化爲

$$\frac{n^2-1}{3}\sum_{1\le i<j\le n}|x_i-x_j|^2 \ge \left(\sum_{1\le i<j\le n}|x_i-x_j|\right)^2. \qquad (1)$$

令 $|x_i - x_j| = a_i$，

即 $|x_i - x_{i+k}| = a_i + a_{i+1} + \cdots a_{i+k-1}$。

考慮一數列

$$S = (n-1)\times 1^2 + (n-2)\times 2^2 + (n-3)\times 3^2 + \cdots + 1\times(n-1)^2 = \frac{n^4-n^2}{12}$$

令

$$S' = (n-1)\times\left(\frac{2}{n}\right)^2 + (n-2)\times\left(\frac{4}{n}\right)^2 + \cdots + 1\times\left(\frac{2n-2}{n}\right)^2 = \frac{4}{n^2}S = \frac{n^2-1}{3}$$

因此(1)之左式可化爲

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{1\le i<j\le n}|x_i-x_j|^2\right)\left((n-1)\times\left(\frac{2}{n}\right)^2+(n-2)\times\left(\frac{4}{n}\right)^2+\cdots+1\times\left(\frac{2n-2}{n}\right)^2\right)\\ \ge\ &(\frac{2}{n}a_1+\frac{2}{n}a_2+\cdots+\frac{2}{n}a_{n-1}+\frac{4}{n}(a_1+a_2)+\cdots+\frac{4}{n}(a_{n-2}+a_{n-1})+\cdots\\ &\frac{2n-2}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}))\end{aligned} \qquad (2)$$

接著我們若能證明(2)之右式等於(1)之右式，則此題得證。

在(1)之右式中，平方前 a_k 的係數爲：

$a_k = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left|k-\frac{n+1}{2}\right|^2$，當 n 是奇數。

$a_k = \frac{n^2+2n}{4} - \left(\left|k-\frac{n+1}{2}\right|-\frac{1}{2}\right)\left(\left|k-\frac{n+1}{2}\right|+\frac{1}{2}\right)$，當 n 是偶數。

在(2)之右式中，平方前 a_k 的係數爲：

$a_k = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left|k-\frac{n+1}{2}\right|^2$，當 n 是奇數。

$a_k = \frac{n^2+2n}{4} - \left(\left|k-\frac{n+1}{2}\right|-\frac{1}{2}\right)\left(\left|k-\frac{n+1}{2}\right|+\frac{1}{2}\right)$，當 n 是偶數。

因此，可知(2)之右式等於 (1)之右式。故此命題得證。

第六題：

設 p 爲一個質數。試證：存在一個質數 q，使得對所有的整數 n, $n^p - p$ 都不能被 q 整除。

試題委員會公布的參考答案：

參考解答：

因 $\frac{p^p-1}{(p-1)} = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{p-1} \equiv p+1 \pmod{p^2}$，我們可得 $\frac{p^p-1}{(p-1)}$ 至少有一質因數 q 且 $q \not\equiv 1 \pmod{p^2}$。此質因數 q 即爲所求，證明如下。

（下轉第 72 頁）