2001 年第 42 屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析

陳昭地* 張幼賢* 朱亮儒* 洪有情*
林哲雄** 陳明揚***
*國立臺灣師範大學 數學系
**國立清華大學 數學系
***國立臺灣大學 電機工程學系

2001 年第 42 屆國際數學奧林匹亞競賽(IMO)是在美國首都華盛頓特區舉行；本屆共有 83 個國家與會，合計 473 位學生代表參賽。競賽活動是由各國領隊組成的主試委員會(Jury Meeting)揭開序幕，除了確認各項議題外，主試委員會的一個主要工作是選拔本屆的競賽試題。國際數學奧林匹亞競賽試題是先由各參賽國(主辦國除外)於規定時間期限之內提交 0 ~ 6 道試題(陳昭地，1991、1992)，再由主辦國的試題委員會(Problem Selection Committee)研究選出大約 30 題預選題，分屬代數、分析、數論、幾何及組合數學等不同領域和不同難度的試題；最後再經由主試委員會票選暨修訂出最後的 6 道 IMO 試題，再依主題內容及難易層次分配成兩份試題，分別在連續的兩天中舉行競試，每天三道題，考試時間都是 4.5 小時。本屆共有 34 個國家提供試題，經由主辦國的試題委員會選出他們認為較適當的 28 道題，再由各國領隊所組成的主試委員會經過三天的會議研究票選出二道幾何題、一道數論題、一道不等式題和二道組合題，其中有二道題(第一、二題)是由南韓所提供，一道題(第三題)是由德國所提供，一道題(第四題)是加拿大所提供，一道題(第五題)是以色列所提供，另一道題(第六題)是由保加利亞所提供。

今年我國六位學生：朱浩瑋(建國中學)、鍾震翰(建國中學)、藍健銘(建國中學)、李宗德(建國中學)、王奕翔(高雄中學)、曾家駿(高雄中學)，總成績共得 141 分，榮獲一面金牌、五面銀牌，在 83 隊中名列第 9 名，成績平 1999 年於羅馬尼亞競賽時之記錄。總分前二十名的國家依次為：中國大陸、俄羅斯、美國(與俄羅斯並列第二名)、南韓、保加利亞(與南韓並列第 4 名)、哈薩克、印度、烏克蘭、中華民國、越南、土耳其、白俄羅斯、日本、德國、羅馬尼亞、巴西、以色列、依朗、香港、波蘭(與香港並列第十九名)。本文將針對這次我國代表團所翻譯成中文版的六道 IMO 試題提供參考解答，評析解題重點，且就我國六位學生代表答題概況及本屆 83 個參賽國 473 位學生代表的得分加以

統計、比較與評析，以供國內相關學者、數學教師等輔導數學資優生之研究、應用與參考。

一、第 42 屆國際數學奧林匹亞競賽試題

Chinese version (Taiwan)　中文版(臺灣) 第四十二屆國際數學奧林匹亞 Washington, DC, United States of America 第一天 2001 年 7 月 8 日　9:00 AM - 1:30 PM(考試時間：$4\frac{1}{2}$ 小時)

【問題一】：

令銳角三角形 ABC 的外心為 O, 且令 P 為從 A 點向 $\overline{BC}$ 邊所作垂線的垂足.

已知: $\angle BCA \geq \angle ABC + 30°$.

試證: $\angle CAB + \angle COP < 90°$.

【問題二】：

試證:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$$

對所有的正實數 a, b, c 都成立.

【問題三】：

21 位女孩及 21 位男孩參加一次數學競賽的解題情形如下:

・ 每位參賽者至多解出 6 道題目.

・任意一位女孩及一位男孩，他們至少解出一道相同的題目.

試證: 存在一道題目，至少有三位女孩， 也至少有三位男孩，他們都解出這道題.

每題：7 分

Chinese version(Taiwan)中文版(臺灣)第四十二屆國際數學奧林匹亞Washington, DC, United States of America 第二天 2001 年 7 月 9 日 9:00 AM - 1:30 PM(考試時間：$4\frac{1}{2}$ 小時)

【問題四】：

令 n 為大於 1 的奇數，且 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 為給定的整數，對於 $1,2,\cdots,n$ 的 $n!$ 個排列中之每一個排列 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，定義

$$S(a)=\sum_{i=1}^{n}k_i a_i$$

試證: 存在 $1,2,\cdots,n$ 的兩個排列 $b,c,b\neq c$，使得 $n!$ 整除 $S(b)-S(c)$

【問題五】：

在 ΔABC 中， $\overline{AP}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線，P 在 $\overline{BC}$ 邊上；$\overline{BQ}$ 為 $\angle ABC=60°$ 的角平分線，Q 在 $\overline{CA}$ 邊上

已知 $\angle BAC=60°$，且 $\overline{AB}+\overline{BP}=\overline{AQ}+\overline{QB}$. 試確定 ΔABC 中各角所有可能的度數各為多少?

【問題六】：

設 a,b,c,d 為整數， $a>b>c>d>0$.

已知 $ac+bd=(b+d+a-c)(b+d-a+c)$.

試證: $ab+cd$ 不是質數.

每題：7 分.

二、第 42 屆國際數學奧林匹亞競賽成績統計

表 1　2001 年第 42 屆 IMO 前 15 名國家各國成績統計表

名次	國　家	第 1 題	第 2 題	第 3 題	第 4 題	第 5 題	第 6 題	總分	去年名次
1	中國大陸	42	40	23	42	42	36	225	1
2	俄羅斯	41	28	25	42	39	21	196	2
3	美國	41	31	28	42	33	21	196	3
4	南韓	42	42	9	42	39	11	185	4
5	保加利亞	41	19	12	42	35	36	185	5

6	哈薩克	42	31	5	36	37	17	168	24
7	印度	42	26	6	36	23	15	148	14
8	烏克蘭	42	25	13	25	28	10	143	13
9	中華民國	42	36	10	28	21	4	141	8
10	越南	42	30	2	35	16	14	139	5
11	土耳其	42	11	2	42	27	12	136	18
12	白俄羅斯	35	16	3	39	33	9	135	7
13	日本	42	18	7	33	28	6	134	15
14	德國	35	25	13	25	21	12	131	20
15	羅馬尼亞	32	10	13	36	20	18	129	11

表2　2001年第42屆IMO全部參賽學生之成績統計表，總人數473

項目	第1題	第2題	第3題	第4題	第5題	第6題
平均值	3.64	1.55	0.88	3.23	2.71	0.78
標準差	2.99	2.63	1.62	3.10	2.35	1.89
得分率	0.52	0.22	0.13	0.46	0.39	0.11
高分組得分率	0.98	0.66	0.32	0.90	0.70	0.37
低分組得分率	0.05	0.01	0.02	0.04	0.10	0.01
鑑別指數	0.93	0.65	0.30	0.86	0.60	0.36
難度指數	0.52	0.34	0.17	0.47	0.40	0.19

高分組人數115人，低分組人數115人

表3　2001年第42屆IMO各題得分成績人數統計表

分數	第1題	第2題	第3題	第4題	第5題	第6題
7	177	77	20	173	82	27
6	20	3	3	8	5	3
5	12	7	6	6	16	9
4	12	11	1	15	17	10
3	45	9	8	11	67	8
2	47	15	36	34	141	16
1	28	40	127	79	47	20
0	132	311	272	147	98	380
總人數	473	473	473	473	473	473

表4　2001年第42屆IMO中華民國學生代表得分及成績統計表

姓名	第1題	第2題	第3題	第4題	第5題	第6題	總分
朱浩瑋	7	7	0	7	3	0	24
鍾震翰	7	7	1	4	3	0	22
藍健銘	7	1	3	7	3	0	21
李宗德	7	7	2	2	2	0	20
曾家駿	7	7	2	7	7	4	34
王奕翔	7	7	2	1	3	0	20
總分	42	36	10	28	21	4	141

三、第42屆國際數學奧林匹亞競賽試題詳解及評析

【問題一】：

【試題委員會公布的參考解答】：

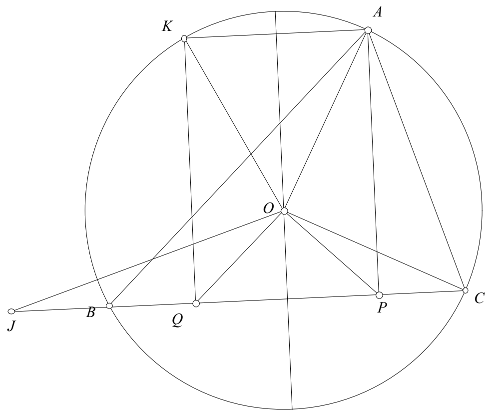
【參考解法一】：

令 $a=\angle CAB$ ， $b=\angle ABC$ ， $g=\angle BCA$ ， $d=\angle COP$.設 K， Q 為 A， P 對於線段 $\overline{BC}$ 垂直平分線的對稱點， R 為 ΔABC 外接圓半徑，

則 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OK}=R$.進而言之，因為 $KQPA$ 為正方形，所以 $\overline{QP}=\overline{KA}$ 現在注意到 $\angle AOK=\angle AOB-\angle KOB=\angle AOB-\angle AOC=2g-2b\ge 60^\circ$ 由此及 $\overline{OA}=\overline{OK}=R$ 之事實可知 $\overline{KA}\ge R$ 且 $\overline{QP}\ge R$ 因此由三角形三邊長的性質可知

$$\overline{OP}+R=\overline{OQ}+\overline{OC}>\overline{QC}=\overline{QP}+\overline{PC}\ge R+\overline{PC}$$

由此可知 $\overline{OP}>\overline{PC}$，因而在 ΔCOP 中，$\angle PCO>d$ 因為 $a=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}(180^\circ-2\angle PCO)=90^\circ-\angle PCO$，因而 $a+d<90^\circ$.



【參考解法二】：

如同解法一，我們僅需證明 $\overline{OP}>\overline{PC}$ 由正弦定律可知 $\overline{AB}=2R\sin g$，且 $\overline{AC}=2R\sin b$

因此我們有 $\overline{BP}-\overline{PC}=\overline{AB}\cos b-\overline{AC}\cos g=2R(\sin gs\cos b-\sin b\cos g)=2R\sin(g-b)$ 由此及 $30^\circ\le g-b<g<90^\circ$ 之事實可知，$\overline{BP}-\overline{PC}\ge R$ 因此 $R+\overline{OP}=\overline{BO}+\overline{OP}>\overline{BP}\ge R+\overline{PC}$ 因而，$\overline{OP}>\overline{PC}$.

【參考解法三】：

首先，我們首先我們證明 $R^2>\overline{CP}\cdot\overline{CB}$ 因為 $\overline{CB}=2R\sin a$ 且 $\overline{CP}=\overline{AC}\cos g=2R\sin b\cos g$，我們僅需證明 $\frac{1}{4}>\sin a\sin b\cos g$.因為 $1>\sin a=\sin(g+b)=\sin g\cos b+\sin b\cos g$，且由於 $30^\circ\le g-b$，$\frac{1}{2}\le\sin(g-b)=\sin g\cos b-\sin b\cos a$.所以 $\frac{1}{4}>\sin b\cos g$，因而 $\frac{1}{4}>\sin a\sin b\cos g$.在直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 上取一點，使得 $\overline{CJ}\cdot\overline{CP}=R^2$

由此及 $R^2>\overline{CP}\cdot\overline{CB}$ 之事實可知，$\overline{CJ}>\overline{CP}$，因而 $\angle OBC>\angle OJC$.因為 $\overline{OC}/\overline{CJ}=\overline{PC}/\overline{CO}$，且 $\angle JCO=\angle OCP$，我們可得 $\Delta JCO\cong\Delta OCP$，且 $\angle OJC=\angle POC=d$.所以 $d<\angle OBC=90^\circ-a$，亦即 $a+d<90^\circ$.

【參考解法四】：

如同參考解法三，$R^2>\overline{CP}\cdot\overline{CB}$ 就另一觀點，對於 ΔABC 的外接圓而言我們有 $\overline{BP}\cdot\overline{PC}=R^2-\overline{OP}^2$ 所以 $\overline{OP}^2=R^2-\overline{BP}\cdot\overline{PC}>\overline{PC}\cdot\overline{CB}-\overline{BP}\cdot\overline{PC}=\overline{PC}^2$，因而如同解法一，我們可得 $a+d<90^\circ$.

【評析與討論】：

1.本題是俄羅斯設計提供的幾何題，我國六位學生代表均能把握住此題，全部得滿分(7 分)，與中國大陸、哈薩克、南韓、印度、烏克蘭、越南、土耳其、日本等其他八國並列單題得分第一。

2.本題是簡單的平面幾何題，考試結果在 473 位參賽者中有 177 位獲得滿分(37.4%)，有 132 位得到 0 分(27.9%))，全體得分的平均值為 3.64 分，得分率 0.52，難度指數 0.52，屬本次六道試題中最容易的題目，而鑑別指數為 0.93，是本次六道試題中鑑別度最高的一題。所有獲得金牌的 39 位選手本題平均值為 6.97 分，而拿到銀牌的 81 位選手在本題得分之平均值為 6.79 分。我國

的六位學生也全部得滿分，可見這種題型仍是我國學生的擅長題型，將來代表隊更應把握這種優勢，以爭取佳績。

3.解本題所需用到的數學知識僅要正弦定律配合三角函數公式或利用畫補助線(如參考解法一)即可。我國六位學生代表有五位是採正弦定律，再配合三角函數公式解題，唯藍健銘同學採用解析幾何證明，不過他也做對本題。雖然這六位同學所用的數學背景知識一樣，但是他們解題的方法均不同，令美國的協調員嘆為觀止，讚嘆不已，是本次IMO競賽中協調成績中最順利的一題。

4.於本題證明中要證明$\overline{OP} > \overline{PC}$，最簡單的證法是如同參考解答二，利用令$\Delta ABC$外接圓半徑為$R$，$b = \angle ABC$，$g = \angle BCA$及$30° \le g - b < g < 90°$之事實可得，$\overline{BP} - \overline{PC} \ge R$，因而可得，$R + \overline{OP} = \overline{BO} + \overline{OP} > \overline{BP} \ge R + \overline{PC}$。如此而易得知，$\overline{OP} > \overline{PC}$。

【問題二】：

【試題委員會公布的參考解答】：

首先我們證明

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \ge \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$$

或等價於證明

$$\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2 \ge a^{\frac{2}{3}}(a^2+8bc)$$

由算幾不等式可得

$$\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2-\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^2=\left(b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)\left(a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right) \ge 2b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}\cdot 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}=8a^{\frac{2}{3}}bc$$

$$\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2 \ge \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^2+8a^{\frac{2}{3}}bc=a^{\frac{2}{3}}\left(a^2+8bc\right)$$

因此

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \ge \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}.$$

同理可得

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+8bc}} \ge \frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}.$$

及

$$\frac{c}{\sqrt{a^2+8bc}} \ge \frac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}.$$

將這三個不等式加起來可得

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1.$$

【曾家駿同學的解法】：

不等式的左端

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8bc}{a^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8ca}{b^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8ab}{c^2}}}$$

令$x=\frac{bc}{a^2}$，$y=\frac{ca}{b^2}$，$z=\frac{ab}{c^2}$，則x,y,z都大於0且$xyz=1$；而此時原不等式等價於$\frac{1}{\sqrt{1+8x}}+\frac{1}{\sqrt{1+8y}}+\frac{1}{\sqrt{1+8z}} \ge 1$，其中$x,y,z$都大於0且$xyz=1$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sqrt{(1+8x)(1+8y)}+\sqrt{(1+8y)(1+8z)}+\\
&\quad\sqrt{(1+8z)(1+8x)} \ge \sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)}\\
&\Leftrightarrow (1+8x)(1+8y)+(1+8y)(1+8z)+(1+8z)(1+8x)\\
&\quad +2\Big[\sqrt{(1+8x)^2(1+8y)(1+8z)}\\
&\quad +\sqrt{(1+8x)(1+8y)^2(1+8z)}\\
&\quad +\sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)^2}\ \Big]\\
&\quad \ge (1+8x)(1+8y)(1+8z),\\
&\Leftrightarrow 2+8(x+y+z)\\
&\quad +2\Big[\sqrt{(1+8x)^2(1+8y)(1+8z)}\\
&\quad +\sqrt{(1+8x)(1+8y)^2(1+8z)}\\
&\quad +\sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)^2}\ \Big]\\
&\quad \ge 8^3xyz=8^3,
\end{aligned}$$

因為

$(1+8x)(1+8y)(1+8z)=1+8(x+y+z)$

$+8^2(xy+yz+zx)+8^3xyz$

$\geq 1+8\times 3\times\sqrt[3]{xyz}+8^2\times 3\times\sqrt[3]{(xyz)^2}+8^3xyz$

$=1+8\times 3+8^2\times 3+8^3=(1+8)^3=3^6$，

所以

$2+8(x+y+z)+2\left[\sqrt{(1+8x)^2(1+8y)(1+8z)}\right.$

$+\sqrt{(1+8x)(1+8y)^2(1+8z)}$

$\left.+\sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)^2}\right]$

$\geq 2+8\times 3\sqrt[3]{xyz}+6\sqrt[3]{\sqrt{(1+8x)^4(1+8y)^4(1+8z)^4}}$

$\geq 2+8\times 3+6\times 3^4=8^3$

故原不等式成立.

【鍾震翰同學解法】：

由柯西不等式

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\right)\left[a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ca}+c\sqrt{c^2+8ab}\right]\geq(a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ca}+c\sqrt{c^2+8ab}}$$

所以僅需證明：$(a+b+c)^2\geq a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ca}+c\sqrt{c^2+8ab}$ 即可.

將此式兩邊平方再化簡後可得

$6a^2b^2+6b^2c^2+6c^2a^2+4a^3(b+c)+4b^3(a+c)+4c^3(a+b)+4abc(a+b+c)\geq 2ab\sqrt{a^2+8bc}\sqrt{b^2+8ca}+2bc\sqrt{b^2+8ac}\sqrt{c^2+8ab}+2ac\sqrt{a^2+8bc}\sqrt{c^2+8ab}$ 由算幾不等式有

$$\sqrt{a^2+8bc}\sqrt{b^2+8ca}\leq\frac{a^2+b^2+8bc+8ca}{2},$$

$$\sqrt{c^2+8ca}\sqrt{b^2+8ca}\leq\frac{c^2+b^2+8ab+8ca}{2},$$

$$\sqrt{a^2+8bc}\sqrt{c^2+8ab}\leq\frac{a^2+c^2+8ab+8bc}{2},$$

所以原不等式等價於

$6(a^2b^2+c^2b^2+a^2c^2)+3(a^3b+a^3c+ab^3+ac^3+b^3c+bc^3)\geq 12(a^2bc+ab^2c+abc^2)$

由算幾不等式又有

$3b^2c^2+3a^2c^2+2bc^3+2ac^3+ab^3+a^3b\geq 12\sqrt[12]{a^{12}b^{12}c^{24}}=12abc^2$.

$3b^2a^2+3c^2a^2+2ba^3+2ca^3+bc^3+b^3c\geq 12a^2bc$,

$3b^2a^2+3c^2b^2+2ab^3+2cb^3+ca^3+ac^3\geq 12ab^2c$.

將此三式相加即得

$6(a^2b^2+c^2b^2+a^2c^2)+3(a^3b+a^3c+ab^3+ac^3+b^3c+bc^3)\geq 12(a^2bc+ab^2c+abc^2)$.

故原不等式成立.

【王奕翔同學的解法】：

原不等式等價於

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}}{(a^3+8abc)^{\frac{1}{2}}}+\frac{b^{\frac{3}{2}}}{(b^3+8abc)^{\frac{1}{2}}}+\frac{c^{\frac{3}{2}}}{(c^3+8abc)^{\frac{1}{2}}}\geq 1$$

利用權方和不等式

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}}{(a^3+8abc)^{\frac{1}{2}}}+\frac{b^{\frac{3}{2}}}{(b^3+8abc)^{\frac{1}{2}}}+\frac{c^{\frac{3}{2}}}{(c^3+8abc)^{\frac{1}{2}}}\geq\frac{(a+b+c)^{\frac{3}{2}}}{(a^3+8abc+b^3+8abc+c^3+8abc)^{\frac{1}{2}}}=\left(\frac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3+24abc}\right)^{\frac{1}{2}}$$

由算幾不等式可知

$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2\geq 6\sqrt[6]{a^6b^6c^6}=6abc$，所以 $3(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)\geq 18abc$ 因此可得 $(a^3+b^3+c^3)+3(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)+6abc\geq a^3+b^3+c^3+18abc+6abc=a^3+b^3+c^3+24abc$

由此可知

$(a+b+c)^3\geq a^3+b^3+c^3+24abc$

即

$$\frac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3+24abc}\geq 1$$

所以

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}}{(a^3+8abc)^{\frac{1}{2}}}+\frac{b^{\frac{3}{2}}}{(b^3+8abc)^{\frac{1}{2}}}+\frac{c^{\frac{3}{2}}}{(c^3+8abc)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\geq\left(\frac{(a+b+c)^3}{a^3+b^2+c^2+24abc}\right)^{\frac{1}{2}}=1$$

故原不等式成立

【註】：權方和不等式：

設 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$　$b_1,b_2,\ldots,b_n>0$；$m>0$，$n\geq 2$，則

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{m+1}}{b_i^m}\geq\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{m+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{m}}.$$

【評析與討論】：

1.本題是南韓所出的代數不等式題，全部參賽的 83 國除了涉嫌作弊的賽浦路斯隊之外，只有南韓隊獲得滿分，所以可見南韓隊佔盡了命題之利，且也顯示南韓提供試題並不夠公正。我國六位學生代表除藍健銘同學外，其他五位同學均能把握住此題得到滿分。雖然在國內集訓期間，教練團一再告訴同學在 IMO 競賽中最好不要以微積分的方法解題目，但是藍健銘同學仍企圖以微積分法解此題，他在解題過程中條件未敘述清楚且計算有錯誤，以致僅得到1分，實在可惜；這不僅影響到他個人的成績，也因此影響到我國的總排名(事實上，我們僅差世界排名第 8 的烏克蘭隊 2 分)。本題我們除了輸給命題的南韓隊及涉嫌作弊的賽浦路斯隊之外，我們僅次於第一名的中國大陸隊(40 分)，以 36 分單題排名第四。

2.本題是中偏難的不等式問題，考試結果在 473 位參賽者中有 77 位獲得滿分(16.3%)，有 311 位得到 0 分(65.8%)，全體得分的平均值為 1.55 分，得分率 0.22，難度指數 0.34，屬本次六道試題中中等難度的題目，而鑑別指數為 0.65，是本次六道試題中鑑別度第三的一題。所有獲得金牌的 39 位選手本題平均值為 5.87 分，而拿到銀牌的 81 位選手在本題得分之平均值為 3.93 分。我國的六位學生代表中有五位得滿分，另一位同學僅得 1 分，可見這種題型仍是我國學生的擅長題型，將來代表隊更應把握這種優勢，以爭取佳績。

3.解本題所需用到的數學知識可用柯西不等式或算幾不等式或 Jensen's 不等式或權方和不等式。我國六位學生代表有五位同學答對本題，唯藍健銘同學僅得到 1 分，實在可惜。本題試題委員會所提供的參考解法非常人工化，很不自然；我國這五位答對的同學中的四位同學雖然都是採用柯西不等式或算幾不等式，使得計算上看起來似乎比試題委員會所提供的解法要複雜，但是他們解題時所使用算幾不等式的配對方式均不相同，且比試題委員會所提供的參考解法要自然的多；尤其王奕翔同學採用權方和不等式，使解題步驟簡化許多，比試題委員會所提供之參考解法的解題品質要高許多，是本次 IMO 競賽中協調成績中尚屬順利的一題。

【問題三】：

【試題委員會公布的參考解答】：

我們以 G 表示參加數學競賽的女孩所形成的集合，以 B 表示參加數學競賽的男孩所形成的集合，以 P 表示數學競賽所有試題所

形成的集合，以 $P(g)$ 表示所有由某個女孩 $g\in G$ 所解出的題目之集合，以 $P(b)$ 表示所有由某個男孩 $b\in B$ 所解出的題目之集合，以 $G(p)$ 表示所有解出題目 $p\in P$ 的女孩所形成之集合，以 $B(p)$ 表示所有解出題目 $p\in P$ 的男孩所形成之集合。在這些符號的定義下，由假設條件可知我們可知:對所有的 $g\in G$， $b\in B$，

(a) $|P(g)|\le 6$， $|P(b)|\le 6$。

(b) $P(g)\cap P(b)\ne f$。

目前我們需要證明存在 $p\in P$，使得 $|G(p)|\ge 3$ 且 $|B(p)|\ge 3$.我們將藉由計數的方式(兩種方式)以反證法證明之。考慮所有的序對 (p,q,r) 使得 $p\in P(g)\cap P(b)$ 令 $T=\{(p,q,r):p\in P(g)\cap P(b)\}$，由條件(b)可知

$$|T|=\sum_{g\in G}\sum_{b\in B}|P(g)\cap P(b)|\ge|G|\cdot|B|=21^2 \tag{1}$$

假設不存在 $p\in P$，使得 $|G(p)|\ge 3$ 且 $|B(p)|\ge 3$。我們首先注意到

$$\sum_{p\in P}|G(p)|=\sum_{g\in G}|P(g)|\le 6|G| \text{ 且 } \sum_{p\in P}|B(p)|\le 6|B| \tag{2}$$

(注意:不等式(2)是由標準之 double counting 的方法得到的。事實上，如果 g 解出 p，我們令 $c(g,p)=1$，其他情形我們令 $c(g,p)=0$，且交換 $\sum_{p\in P}\sum_{g\in G}c(g,p)$ 之中求和的次序）令 $P_+=\{p\in P:|G(p)|\ge 3\}$，$P_-=\{p\in P:|G(p)|\le 2\}$

現在我們證明下列引理

引理: $\sum_{p\in P_-}|G(p)|\ge|G|$，因而 $\sum_{p\in P_+}|G(p)|\le 5|G|$ 此外亦可知，$\sum_{p\in P_+}|B(p)|\ge|B|$ 因而

證明: 對任意的 $g\in G$，由已知條件(a),(b)及鴿籠原理可得知 g 解出某個問題 p，而此問題至少被 $\lceil 21/6\rceil=4$ 個男孩解出。

依假設條件，由 $|B(p)|\ge 4$ 可得 $p\in P_-$，因此每位至少解出一題的女孩是在 P_- 中，因而

$$\sum_{p\in P_-}|G(p)|\ge|G| \tag{3}$$

由(2)，(3)我們可得

$$\sum_{p\in P_+}|G(p)|=\sum_{p\in P}|G(p)|-\sum_{p\in P_-}|G(p)|\le 5|G|$$

同理，每位男孩解出一個問題，此問題同時至少被 4 位女孩所解出，因此每位男孩解出一到題目 $p\in P_+$，因而 $\sum_{p\in P_+}|B(p)|\ge|B|$ 由上述引理我們可知

$$\begin{aligned}|T|&=\sum_{p\in P}|G(p)|\cdot|B(p)|\\&=\sum_{p\in P_+}|G(p)|\cdot|B(p)|+\sum_{p\in P_-}|G(p)|\cdot|B(p)|\\&\le 2\sum_{p\in P_+}|G(p)|+2\sum_{p\in P_-}|G(p)|\\&\le 10|G|+10|B|=20\cdot 21.\end{aligned}$$

此與(1)矛盾，因此本題目得證

【評析與討論】：

1. 本題是德國所出難度很高的組合分析問題，要完全答對本題必須要有離散數學或圖論的基礎。我國六位學生代表在國內應已受過類似題型的訓練，但本題均答的不理想。雖然正副領隊及觀察員已極力為學生爭取最高之合理成績，但我國全隊總分僅得 10 分。本題與第六題得分不理想，是我國此次未能擠入前五名的原因之一。歷年來亞洲所有國家學生代表對於組合或圖論的問題答得都不理想，這可能是我們亞洲社會思考模式與基礎教育方式與歐美不同所致，然而此類問題是 IMO 考試主要問題之一(這三年來，均占全部試題的三分之一)，今後我國若想擠入前五名，應從基礎教育及訓練著手。
2. 本題是難度極高的組合分析問題，考試結果在 473 位參賽者中僅有 20 位獲得滿分(4.

2%)，有272位得到0分(57.5%)；全體得分的平均值為0.88分，得分率0.13；難度指數0.17；而鑑別指數為0.30。所有獲得金牌的39位選手本題平均得分數為3.28分；而拿到銀牌的81位選手在本題得分之平均值也有1.58分。我國六位學生代表，按學生編號得分數依序為0, 1, 3, 2, 2, 2分。我國得金牌的一位學生代表的平均分數比所有獲得金牌的39位選手本題平均得分數略低，而我國的六位學生得分的平均值在所有獲得銀牌的81位選手本題平均得分數之上，可見這種題型我國學生的水準正處於國際的平均水準，將來代表隊應加強此方面的訓練超越國際平均水準，以爭取更佳的成績。

3. 本題是本屆我們所協調的最後最後一題，就美國所指派的分數協調員所言，所有參賽的學生代表們，只要是使用圖論方法的均無法將此題解出，所以只要是用圖論的方法解此題均不給部分分數。我國有一位學生代表也是使用圖論方法，可是也未完整的解出此題，雖然他已得到部分結論，我們認為他應可得1分，但是美國所派分數協調員仍堅持在他們給分的一致性前提下，不給任何部分分數，實在可惜。

【問題四】：

【試題委員會公布的參考解答】：

記$\sum S(a)$表示n!個排列$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的和。我們將以兩種方法計算$\sum S(a)$ (mod n!)，其中一種方法是以反證法證明，得到當n為奇數時的矛盾。

第一種方法:

在$\sum S(a)$中，k_1對每一個$m\in\{1,2,\cdots\cdots,n\}$都乘了$(n-1)!$次，因為對於$1,2,\cdots,n$的排列中$a_1=m$，有$(n-1)!$次，所以在$\sum S(a)$中$k_1$的係數為

$$(n-1)!(1+2+\cdots+n)=(n+1)!/2.$$

同理，對每一個k_i的係數亦為$(n+1)!/2$，因此

$$\sum S(a)=\frac{(n+1)!}{2}\sum_{i=1}^{n}k_i \qquad (1)$$

第二種方法:

若對所有的排列$b,c,b\neq c$，n!都不能整除$S(b)-S(c)$，則所有的$S(a)$在(mod n!)的餘數都不同.因為有n!個排列,所以這些餘數恰為0, 1,2,$\cdots$,n!-1因此,

$$\sum S(a)\equiv\frac{(n!-1)\cdot n!}{2}\ (\text{mod } n!) \qquad (2)$$

由(1)及(2)可得

$$\frac{(n+1)!}{2}\sum_{i=1}^{n}k_i\equiv\frac{(n!-1)\cdot n!}{2}\ (\text{mod } n!) \qquad (3)$$

如果n為奇數，(3)式的左端在(mod n!)下為0，但當n為大於1的奇數時，(3)式的右端在(mod n!)下不為0(因為$n!-1$為奇數)。所以在n為大於1的奇數時，我們得到矛盾，因而本題得證

【朱浩瑋同學解法】：

假設對於$1,2,\cdots,n$任意的兩個排列b,c, $b\neq c$，均有$n!\nmid S(b)-S(c)$

若在$k_1,k_2,\cdots,k_n$之中存在$i\neq j$，$1\le i<j\le n$使得$k_i=k_j$，可取$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $a'=(a_1,a_2,\cdots,a_{i-1},a_j,a_{i+1},\cdots,a_{j-1},a_i,a_{j+1},\cdots,a_n)$

則可得$S(a)=S(a')$，從而可得$n!\mid S(a)-S(a')$，矛盾! 因此不妨設$k_1,k_2,\cdots,k_n$。因為對於$1,2,\cdots,n$任意的兩個排列b,c, $b\neq c$均有$n!\nmid S(b)-S(c)$，所以1,2,$\cdots$,n的n!個排列除以n!之餘數分別為0,1,2,$\cdots$,$(n-1)!$。此外，取$a=$

$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$a'=(n+1-a_1,n+1-a_2,\cdots,n+1-a_n)$，

則 $S(a)+S(a')=\sum_{i=1}^{n}k_ia_i+\sum_{i=1}^{n}k_i(n+1-a_i)=(n+1)(k_1+k_2+\text{L}\ +k_n)$

事實上對任意的一個排列 a，一定可以找到一個與 a 相異的排列 a' 滿足上式。所以 $1,2,\cdots,n$ 的排列恰可兩兩配對，配成 $\frac{n!}{2}$ 對，每對之和均為定數 $(n+1)(k_1+k_2+\cdots+k_n)$。因為 $(n+1)(k_1+k_2+\cdots+k_n)$ 及 $n!$ 均為偶數，不妨設 $(n+1)(k_1+k_2+\cdots+k_n)\equiv 2t(\bmod n!)$，$0\le t<\frac{n!}{2}$，$t\in Z$。若 $S(a)\equiv p\,(\bmod n!)$，其中 $0\le p<t$，則可取

$a'=(n+1-a_1,n+1-a_2,\cdots,n+1-a_n)$;

因而可得

$S(a')=2t-p\,(\bmod n!)$，$t<2t-p\le 2t$

若 $S(a)\equiv p\,(\bmod n!)$，其中 $2t<p<\frac{n!}{2}+t$，取相同的 a'，則 $S(a')=n!+2t-p\,(\bmod n!)$，$\frac{n!}{2}+t<n!+2t-p<n!$

所以當 $p\ne t$，$\frac{n!}{2}+t$ 時，$S(a')$ 模 $n!$ 的餘數只有一種可能。此外將 $p\ne t$ 與 $\frac{n!}{2}+t$ 配對，則此時 $S(a)\equiv S(a')\equiv p\,(\bmod n!)$。所以不論如何，一定可以找到 $1,2,\cdots,n$ 的兩個相異排列 $b,c,b\ne c$，使得 $n!$ 整除 $S(b)-S(c)$。

【藍健銘同學的解法】：

設 $1,2,\cdots,n$ 的 $n!$ 個排列為 $x_1,x_2,\cdots,x_{ni}$，設 $S(x_i)\equiv S'(x_i)\,(\bmod n!)$，$i=1,2,\cdots,n!$ 則 $0\le S'(x_i)<n!-1$。

(i) 若 $S'(x_1), S'(x_2),\cdots, S'(x_{n!})$ 不多於 $(n!-1)$ 種數，則由鴿籠原理可知存在 $1\le i,j\le n!, i\ne j$ 使得 $S'(x_i)\equiv S'(x_j)\,(\bmod n!)$

(ii) 若 $S'(x_1), S'(x_2),\cdots, S'(x_{n!})$ 恰有 $n!$ 種數，則顯然 $\{S'(x_1), S'(x_2),\cdots, S'(x_n)\}=\{0,1,2,\cdots,n!-1\}$

注意到：$S(x_1)+S(x_2)+\cdots+S(x_{n!})\equiv S'(x_1)+S'(x_2)+\cdots+S'(x_{n!})\,(\bmod n!)$，又因為每個 k_i 前的係數中，$1,2,\cdots,n$ 各有 $\frac{n!}{n}$ 個，且由假設條件 n 為奇數可知 $\frac{n+1}{2}$ 為整數，所以

$S(x_1)+S(x_2)+\cdots+S(x_{n!})=\frac{n!}{n}\ \frac{n(n+1)}{2}\ (k_1+k_2+\cdots+k_n)\quad 0\,(\bmod n!)$

但是

$S'(x_1)+S'(x_2)+\cdots+S'(x_n)=1+2+\cdots+(n!-1)=\frac{n!}{2}+n!\ \frac{n!-2}{2}$

當 $n\ge 3$ 時，$n!$ 為偶數，所以 $\frac{n!-2}{2}$ 為整數，因而

$S'(x_1)+S'(x_2)+\cdots+S'(x_n)\equiv\frac{n!}{2}\,(\bmod n!)$

顯然 $\frac{n!}{2}\not\equiv 0\,(\bmod n!)$，所以

$S(x_1)+S(x_2)+\cdots+S(x_{n!})\not\equiv S'(x_1)+S'(x_2)+\cdots+S'(x_{n!})\,(\bmod n!)$，

矛盾！故第二種情形不可能發生，因此命題得證

【曾家駿同學的解法】：

若不存在題目所要求的兩個排列 b,c，則對任意的兩個排列 b,c 均有 $S(b)\equiv S(c)\,(\bmod n!)$。因為 $1,2,\cdots,n$ 恰有 $n!$ 個排列，所以 mod $n!$ 均不同。不失一般性，可設

$S(a_1)\equiv 0\,(\bmod n!)$，$S(a_2)\equiv 1\,(\bmod n!)$，

$\vdots$

$S(a_{n!})\equiv n!-1\,(\bmod n!)$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n!}S(a_i)\equiv 0+1+\cdots+(n!-1)\equiv\frac{(n!-1)}{2}\,(\bmod n!)$$

即

$$k_1(1+2+\cdots+n)(n-1)!+k_2(1+2+\cdots+n)(n-1)!+\cdots+k_n(1+2+\cdots+n)(n-1)!\equiv\frac{(n!-1)}{2}\,(\bmod n!)$$

但是

$$\sum_{i=1}^{n!} k_i(1+2+\cdots+n)(n-1)! = \left(\sum_{i=1}^{n!} k_i\right)\frac{n(n+1)}{2}(n-1)!$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{n!} k_i\right)\frac{n+1}{2}n!,$$

所以

$$\left(\sum_{i=1}^{n!} k_i\right)\frac{n+1}{2}n! \equiv \frac{n!(n!-1)}{2} \pmod{n!}$$

因為 $n!-1$ 為奇數，$n+1$ 為偶數且 $(n!-1, n!)=1$，所以上式的左端可被 $n!$ 整除，而右端不能被 $n!$ 整除，矛盾！故本題得證。

【評析與討論】：

1. 本題是加拿大所設計的組合數論題，直接證明幾乎辦不到，需用反證法證明之。我國的六位學生代表均是採用反證法，鍾震翰同學的解法實際上是可以解出此題的，但因為有一種情形的討論沒有詳細寫出，雖然正副領隊及觀察員都極力辯論且證明給美方的評分協調員看，甚至上述至組的評分協調組的組長，仍無法再多要 1 分，鍾震翰同學本題僅獲得 4 分，實在可惜！就國內訓練時的表現來看，我國的六位學生代表均應有能力解出此題，但有三位同學第二天測驗時得失心太重表現失常，且花太多時間在第五題上，以致時間不夠完全解出或清楚寫出解題過程， 錯失得分良機，非常可惜! 在以後的IMO國手訓練過程中，除了要傳授同學們的數學知識及訓練解題技巧之外，亦應加強學生們的書寫表達能力。
2. 本題是中等難度的組合數論題，考試結果在 473 位參賽者中有 173 位獲得滿分(36.6%)，有 147 位得到 0 分(31.1%)；全體得分的平均值為 3.23 分，得分率 0.86；難度指數 0.47；而鑑別指數為 0.86 。所有獲得金牌的 39 位選手本題平均得分數為 6.72 分；而拿到銀牌的 81 位選手在本題得分之平均值也有 5.95 分。我國六位學生代表，按學生編號得分數依序為 7, 4, 7, 2, 7, 1 分。我國得金牌的學生代表的平均分數與所有獲得金牌的 39 位選手本題平均得分數略高，而我國的六位學生得分的平均值在所有獲得銀牌的 81 位選手本題平均得分數低，可見這種題型我國學生的水準比國際的平均水準略低，將來代表隊應加強此方面的訓練超越國際平均水準，以爭取更佳的成績。
3. 歷年來我國學生的組合學能力一直比 IMO 前五名的歐美國家代表隊弱，而本屆因為我國的學生代表都是新手且平均年級也較低，所以對數論的熟練度也較不夠；尤其大部分同學解題策略錯誤，在第五題花時間太多，以致未能把握本題，是我們此屆未能擠入前五名的主要原因之一。 (待續)