第 41 屆國際數學奧林匹亞競賽試題

第四十一屆國際數學奧林匹亞

中文版(臺北) Chinese version (Taipei)

第一天

大田, 2000 年 7 月 19 日

考試時間 $4\frac{1}{2}$ 小時

每題 7 分

【問題一】: 兩圓 Γ_1 與 Γ_2 交於 M, N 兩點。
設 l 為此二圓的公切線，切圓 Γ_1 於 A 點，切圓 Γ_2 於 B 點，且 M 點距此切線比 N 點距此切線更近。 過 M 點平行於 l 的直線另交圓 Γ_1 於 C 點，交圓 Γ_2 於 D 點。
直線 CA 與直線 DB 交於 E 點；直線 AN 與直線 CD 交於 P 點；直線 BN 與直線 CD 交於 Q 點。
證明 ： $EP = EQ$.

【問題二】: 設 a, b, c 為正實數滿足 $abc = 1$.
證明 : $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 1.$

【問題三】: 設 $n \geq 2$ 為正整數。開始時，有 n 隻跳蚤在一條水平線上，它們不是全部在同一位置。
對於正實數 λ ，定義一個**移動**如下：

> 選取任意兩隻跳蚤，一隻在 A 點一隻在 B 點，且 A 點在 B 點的左側；讓位於 A 點的跳蚤沿著原直線跳至 B 點右側的 C 點,並滿足 $\frac{BC}{AB} = \lambda$.

試確定所有的實數 λ 滿足：對於水平線上任意點 M，不論這 n 隻跳蚤開始時的位置如何，都可以經由有限次的移動，使得這些跳蚤全部移至 M 點的右側。

第四十一屆國際數學奧林匹亞

中文版(臺北) Chinese version (Taipei)

第二天

大田, 2000 年 7 月 20 日

考試時間 $4\frac{1}{2}$ 小時

每題 7 分

【問題四】: 一位魔術師有一百張分別標上 1 至 100 號碼的牌。他將這些牌分放到三個盒子中，一個盒子為紅色，一個盒子為白色，一個盒子為藍色，使得每個盒子至少有一張牌。

一位觀眾在這三個盒子中選取兩個盒子,於這兩個盒子的每一個盒子中各取一張牌，並宣告這兩張牌標號數字的和。給予這個數字和，魔術師可正確指出沒有取牌的盒子。

試問將這一百張牌分放到三個盒子,有多少種不同的方法可使得這魔術保證成功。(兩種放法中，至少有一張牌被放在不同的盒子時，視為不同的方法)。

【問題五】: 試判斷有沒有一個正整數 n, 可使

n 恰可被 2000 個相異的質數整除，且 2^n+1 可被 n 整除。

【問題六】: 設 AH_1, BH_2, CH_3 為銳角三角形 ABC 的三個高。三角形 ABC 的內切圓分別切三邊 BC, CA, AB 於 T_1, T_2, T_3 三點。並設直線 l_1, l_2, l_3 依序分別為直線 H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 關於對稱軸 T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2 的對稱圖形。

證明 ： 由 l_1, l_2, l_3 所形成之三角形的三個頂點，落在三角形 ABC 的內切圓上。

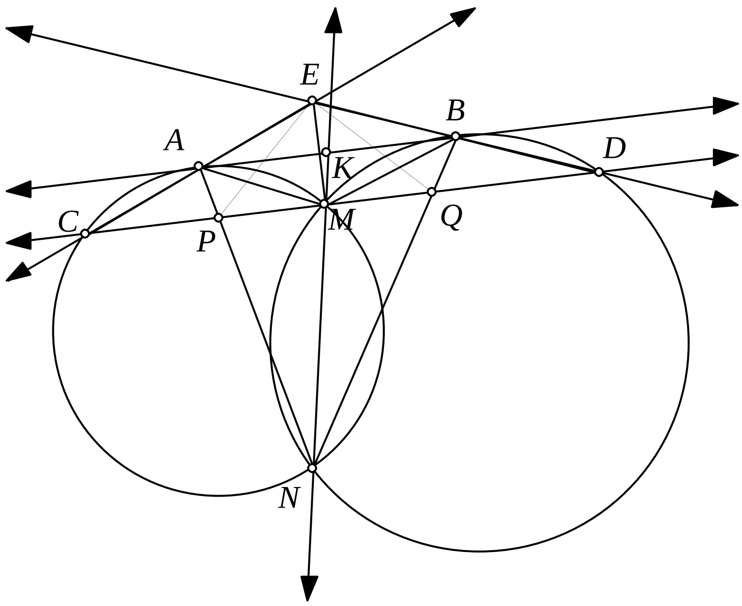
二・第 41 屆國際數學奧林匹亞競賽試題詳解

【問題一】：兩圓 Γ_1 與 Γ_2 交於 M, N 兩點。

設 l 為此二圓的公切線，切圓 Γ_1 於 A 點，切圓 Γ_2 於 B 點，且 M 點距此切線比 N 點距此切線更近。 過 M 點平行於 l 的直線另交圓 Γ_1 於 C 點，交圓 Γ_2 於 D 點。

直線 CA 與直線 DB 交於 E 點；直線 AN 與直線 CD 交於 P 點；直線 BN 與直線 CD 交於 Q 點。

證明 ： $EP = EQ$.



【試題委員會公布的參考解答及給分標準】：

設直線 MN 與直線 AB 交於 K 點。由切割線定理可知

$$AK^2 = KN \cdot KM = BK^2,$$

所以 K 為線段 AB 的中點。因為 PQ 平行 AB, 所以 M 為線段 PQ 的中點。

(獨立得 3 分)

(若僅證明出 $AK = BK$ 只得 2 分)

因而現在我們僅需證明 EM 垂直 PQ. 因為 CD 平行 AB, 所以 A 點與 B 點分別為圓 Γ_1 上弧 CM 與圓 Γ_2 上弧 DM 的中點。因此 ΔACM 與 ΔBDM 均為等腰三角形。再由 CD 平行 AB, 我們可得

$$\angle BAM = \angle AMC = \angle ACM = \angle EAB,$$

$$\angle ABM = \angle BMD = \angle BDM = \angle EBA,$$

這表示 E、M 為在直線 AB 兩側的對稱點，所以 EM 垂直 AB, 因而 EM 垂直 PQ.

(獨立得 3 分)

(若僅證明出 $\Delta ABE \cong \Delta ABM$ 只得 2 分)

故， ΔEPQ 為等腰三角形，因而 $EP = EQ$.

【註】: 若未完全證明出，部分分數最多只可得 4 分。

【問題二】: 設 a, b, c 為正實數滿足 $abc=1$.

$$\text{證明：}\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1.$$

【試題委員會公布的參考解答及給分標準】:

(解法一): 因為 $abc=1$, 在不失一般性的原則下可令 $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$, 其中 x, y, z 為正數。

(得 3 分)

原不等式可改寫為

$$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)\le xyz.$$

由 x, y, z 這三個數的大小關係，易知 $u=x-y+z$, $v=y-z+x$, $w=z-x+y$ 這三個數之中至多有一個數為負。

(得 1 分)

若 u, v, w 這三個數中恰有一數為負，則 $uvw\le 0<xyz$. 不妨設 $u\ge 0$, $v\ge 0$, $w\ge 0$. 由算幾不等式可得

$$\sqrt{uv}=\sqrt{(x-y+z)(y-z+x)}\le \frac{1}{2}[(x-y+z)+(y-z+x)]=x.$$

同理可得，$\sqrt{vw}\le y$, $\sqrt{wu}\le z$; 因此 $uvw\le xyz$. (得 3 分)

(解法二): 因為 $abc=1$, 所以

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)=\frac{(ab-b+1)(bc-c+1)(ca-a+1)}{abc}$$
$$=(ab-b+1)(bc-c+1)(ca-a+1).$$

又因 $\frac{1}{b}=ac$, $\frac{1}{c}=ab$, $\frac{1}{a}=bc$, 所以

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)=(a-1+ac)(b-1+ab)(c-1+bc).$$

記 $L=\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)$, 我們可得

$$L^2=(ab-b+1)(bc-c+1)(ca-a+1)(a-1+ac)(b-1+ab)(c-1+bc).$$

若 $u=a-1+\frac{1}{b}\le 0$, 則 $a<1$ 且 $b>1$, 由此可得 $v=b-1+\frac{1}{c}>0$ 且 $w=c-1+\frac{1}{a}>0$.
因此 $L=uvw\le 0<1$, 而本命題成立。同理，若 $v\le 0$ 或 $w\le 0$,本命題也成立。現在考

慮$u>0$，$v>0$，$w>0$；即L^2的每一因式均為正。由算幾不等式我們可得

$$\sqrt{(ab-b+1)(b-1+ab)} \le \frac{1}{2}[(ab-b+1)+(b-1+ab)] = ab,$$

$$\sqrt{(bc-c+1)(c-1+bc)} \le \frac{1}{2}[(bc-c+1)+(c-1+bc)] = bc,$$

$$\sqrt{(ca-a+1)(a-1+ca)} \le \frac{1}{2}[(ca-a+1)+(a-1+ca)] = ca.$$

所以，$L \le (ab)(bc)(ca) = (abc)^2 = 1.$

(解法三)：因為$abc=1$，所以

$$\frac{1}{a}(a-1+\frac{1}{b})+c(b-1+\frac{1}{c})=2,$$

$$\frac{1}{b}(b-1+\frac{1}{c})+a(c-1+\frac{1}{a})=2,$$

$$\frac{1}{c}(c-1+\frac{1}{a})+b(a-1+\frac{1}{b})=2.$$

易知$u=a-1+\frac{1}{b}$，$v=b-1+\frac{1}{c}$，$w=c-1+\frac{1}{a}$這三個數之中至多有一個為負，且當有一個數為負時，原不等式非正，因而原不等式成立。若$u\ge 0$，$v\ge 0$，$w\ge 0$；由算幾不等式我們可得

$$2=\frac{1}{a}u+cv\ge 2\sqrt{\frac{c}{a}uv},\quad 2=\frac{1}{b}v+aw\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}vw},\quad 2=\frac{1}{c}w+bu\ge 2\sqrt{\frac{b}{c}wu}.$$

因此，

$$uv\le\frac{a}{c},\quad vw\le\frac{b}{a},\quad wu\le\frac{c}{b};$$

因而，

$$(uvw)^2\le\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}=1.$$

因為$uvw\ge 0$，所以$uvw\le 1$.

【註】：不等式中等號成立若且唯若$a=b=c=1$.

【問題三】：設$n\ge 2$為正整數。開始時，有n隻跳蚤在一條水平線上，它們不是全部在同一位置。

對於正實數λ，定義一個**移動**如下：

選取任意兩隻跳蚤，一隻在A點一隻在B點，且A點在B點的左側；

讓位於 A 點的跳蚤沿著原直線跳至 B 點右側的 C 點，並滿足 $\frac{BC}{AB}=\lambda$.

試確定所有的實數 λ 滿足：對於水平線上任意點 M，不論這 n 隻跳蚤開始時的位置如何，都可以經由有限次的移動，使得這些跳蚤全部移至 M 點的右側。

【試題委員會公布的參考解答與給分標準】:
最有效的策略是讓最左端的跳蚤跳過最右端的跳蚤。在此策略下有兩個重要的參數：

- 最遠兩隻跳蚤間之距離(所有跳蚤所形成之集合的半徑)，將此記為 d_k;
- 相鄰兩隻跳蚤間最短之距離，將此記為 δ_k.

顯然，$d_k \ge (n-1)\delta_k$. 在($k+1$)次移動後，於相鄰兩隻跳蚤間產生了一個新的距離 λd_k. 它可能是新的相鄰兩隻跳蚤間最短之距離，如果真是如此，則 $\delta_{k+1}=\lambda d_k$; 若這個新的距離 λd_k, 並不是新的相鄰兩隻跳蚤間最短之距離，則 $\delta_{k+1}\ge\delta_k$. 因此，

$$\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} \ge \min\left\{1, \frac{\lambda d_k}{\delta_k}\right\} \ge \min\{1, (n-1)\lambda\}.$$

所以，若 $\lambda \ge \frac{1}{n-1}$, 則 $\delta_{k+1}\ge\delta_k$, $\forall k\in N$; 這表示相鄰兩隻跳蚤間最短之距離非遞減。因此最左端之跳蚤在每一次移動之後會向右移動一個大於某一正常數的距離，故在有限次的移動之後，終可使所有的跳蚤移致 M 點的右側。

(得 2 分)

現在我們證明：若 $\lambda < \frac{1}{n-1}$, 將無法使得所有的跳蚤都能移致 M 點的右側。

因為跳蚤都是沿著一直線移動，我們可視跳蚤所在的位置為實數。考慮任意序列的移動，我們以 s_k 表示在第 k 次移動後，所有代表跳蚤所在位置數字之和，以 w_k 表示在第 k 次移動後，代表最右端跳蚤所在的位置之數字。注意：$s_k \le n w_k$. 我們現在僅需證明數列 (w_k) 是有界的。

在第($k+1$)次移動，一隻位於 A 點的跳蚤跳過位於 B 點的跳蚤而落在 C 點，設這些位置分別記為 a, b, c; 此時我們可得 $s_{k+1}=s_k+c-a$. 由所定的規則可知 $c-b=\lambda(b-a)$, 此等價於 $\lambda(c-a)=(1+\lambda)(c-b)$. 因此，

$$s_{k+1}-s_k=c-a=\frac{1+\lambda}{\lambda}(c-b).$$

設 $c>w_k$; 則此次移動恰使 A 點的跳蚤移致最右端 C 點的位置上，即 $w_{k+1}=c$. 因為 b 是某隻跳蚤在第 k 次移動後所在的位置，所以 $b\le w_k$ 且

$$s_{k+1}-s_k=\frac{1+\lambda}{\lambda}(c-b)\ge\frac{1+\lambda}{\lambda}(w_{k+1}-w_k).$$

此一估計在 $c\le w_k$ 時也成立，因為此時 $w_{k+1}-w_k=0$, 而 $s_{k+1}-s_k=c-a>0$.
考慮數列

$$z_k = \frac{1+\lambda}{\lambda} w_k - s_k,\ \forall k = 0,1,2,\cdots.$$

由前不等式可知 $z_{k+1} - z_k \le 0$；這表示此數列為非遞增數列，因而 $z_k \le z_0$，$\forall k = 0,1,2,\cdots$. 若 $\lambda < \frac{1}{n-1}$，則 $1+\lambda > n\lambda$，且我們可令 $\mu = \frac{1+\lambda}{\lambda} - n$，並將 z_k 表示為 $z_k = (n+\mu)w_k - s_k$. 由此可得 $z_k = \mu w_k + (n w_k - s_k) \ge \mu w_k$，因而 $w_k \le \frac{z_0}{\mu}$，$\forall k = 0,1,2,\cdots$. 故，λ 不可以小於 $\frac{1}{n-1}$.

(得 5 分)

【註】:

- 證明在 $n=3$ 時，$\lambda \ge \frac{1}{n-1}$ 不給分；
- 證明在 $n=3$ 時，λ 不可以小於 $\frac{1}{n-1}$ 可得 1 分；
- 猜出 λ 與 $\frac{1}{n-1}$ 有關可得 1 分；
- 猜出 $\lambda \ge \frac{1}{n-1}$ 且證明出 $n=3$ 的完整的情形，可得 2 分。

【問題四】: 一位魔術師有一百張分別標上 1 至 100 號碼的牌。他將這些牌分放到三個盒子中，一個盒子為紅色，一個盒子為白色，一個盒子為藍色，使得每個盒子至少有一張牌。

一位觀眾在這三個盒子中選取兩個盒子，於這兩個盒子的每一個盒子中各取一張牌，並宣告這兩張牌標號數字的和。給予這個數字和，魔術師可正確指出沒有取牌的盒子。

試問將這一百張牌分放到三個盒子，有多少種不同的方法可使得這魔術保證成功。(兩種放法中，至少有一張牌被放在不同的盒子時，視為不同的方法)。

【試題委員會公布的參考解答與給分標準】:

我們將證明有 12 種方法可使得這魔術保證成功。

(指出有 12 種方可得 1 分)

以下若 i 號牌放在紅色(或白色、藍色)盒子裡，我們則視 i 號牌為紅色(或白色、藍色)。

<u>情形 1</u>：存在 i，$i+1$，$i+2$ 號牌分別放在三個不同顏色的盒子裡；不妨設為紅色、白色、藍色(以下簡記為 r、w、b)。因為 $i+(i+3)=(i+1)+(i+2)$，所以 $i+3$ 號牌不可以是白色(否則 $i+3$ 號牌與 $i+1$ 號牌均取自白色盒子，i 號牌與 $i+2$ 號牌分別取自紅色與

藍色盒子，但是$i+(i+3)=(i+1)+(i+2)=2i+3$，當觀眾宣告$2i+3$時，魔術師將無法分辨是哪個盒子未取牌)。同理，$i+3$號牌不可以是藍色。因此$i+3$號牌必為紅色。由此可知，當有三張連號的牌分別放在三種不同顏色的盒子時，則決定了以後各號碼之牌要放在何種顏色的盒子中，且此方式也可推知以前各號碼之牌要放在何種顏色的盒子中。因此我們僅需決定 1, 2, 3 號牌分別放在何種顏色的盒子，即可決定這 100 張牌要如何放置；這三張牌的放置方法共有$3!=6$種。

(看出 rwbrwb⋯, 不論有否證明可得 1 分)

<u>**情形 2**</u>：沒有三張連號的牌分別放在三種不同顏色的盒子中。設 1 號牌為紅色，設i號牌為編號最小數字非紅色(r)的牌(因而$i>1$)，不妨設為白色(w)；並設藍色牌的最小數字為k. 因為沒有三張連號的牌分別放在三種不同顏色的盒子中(即沒有 rwb 之情形)，所以$i+1<k$.

設$k<100$. 因為$i+k=(i-1)+(k+1)$, 所以$k+1$號牌應放在紅色盒子中。由於$i+(k+1)=(i+1)+k$, 所以$i+1$號牌應放在藍色盒子中，此與藍色牌的最小數字為k矛盾(注意：$i+1<k$)！故，k僅能為 100.

因為$(i-1)+100=i+99$, 所以編號 99 的牌為白色。現在我們證明：1 號牌為紅色，100 號牌為藍色，其餘的牌均為白色。若存在$t>1$號牌為紅色，則因$t+99=(t-1)$ +100, 所以$t-1$號牌為藍色。但是 100 號牌是最小數字的藍色牌，所以對於任意$t>1$數字的牌均不會是紅色；然而 100 號牌是最小數字的藍色牌，所以 2~99 號牌都必須是白色。

此時，若所抽兩張牌的數字和至多為 100, 則未抽牌的盒子為藍色；若所抽兩張牌的數字和為 101, 則未抽牌的盒子為白色；若所抽兩張牌的數字和大於 101, 則未抽牌的盒子為紅色。故，這種放法可行。

1 號牌、100 號牌及 2~99 號牌的顏色分配方法也有$3!=6$種；所以總共有 12 種放法可使得這魔術保證成功。

(看出 rww⋯wb, 沒有證明可得 1 分，有證明可得 2 分)

(證明沒有其他的解可得 3 分)

【註】：1. 在證明沒有其他的解部分，若消除至少一種其他的可能性可得 1 分，在證明過程中有小疏失可得 2 分。

2. 沒有實際驗算 rww⋯wb 放置方法可行，扣 1 分。

【問題五】：試判斷有沒有一個正整數 n, 可使

n 恰可被 2000 個相異的質數整除，且2^n+1可被 n 整除。

【試題委員會公布的參考解答與給分標準】：答案是肯定的；事實上，我們可以證明更一般的結果：

對每一個$k\in N$, 存在一個$n=n(k)\in N$, 使得 n 整除 2^n+1, 3 整除 n, 且

n 恰有 k 個相異的質因數。

本命題可用數學歸納法證明。

(提到本命題可用數學歸納法證明，可得 1 分)

當 $k=1$ 時，可取 $n=3$，則滿足所求。

(證明 $k=1, 2$ 可得 2 分)

設在某個 $k\ge 1$ 時，存在一個 $n=n(k)=3^l\cdot t$，其中 $l\ge 1$，3 不整除 t 且 n 滿足條件(即 n 整除 2^n+1, 3 整除 n, 且 n 恰有 k 個相異的質因數)。

顯然 n 為奇數，因而 $3\,\big|\,2^{2n}-2^n+1$. 由於 $2^{3n}+1=(2^n+1)(2^{2n}-2^n+1)$，所以 $3n\,\big|\,2^{3n}+1$.

由以下的引理可知：存在奇質數 p 使得 $p\,\big|\,2^{3n}+1$ 且 p 不整除 2^n+1. 因此 $n=n(k+1)=3p\cdot n(k)$ 滿足所求(在 $k+1$ 之情形)。故由數學歸納法可知本命題成立。

(運用引理證明出本命題，但未證明引理可得 4 分)

<u>引理</u>：對每一個整數 $a>2$，存在一個質數 p 使得 $p\,\big|\,a^3+1$，但是 p 不整除 $a+1$.

【證明】：設本引理不成立，即存在一個整數 $a>2$，使得任意質數可以整除 a^2-a+1，就能整除 $a+1$. 因為 $a^2-a+1=(a+1)(a-2)+3$，所以 a^2-a+1 的質因數只有 3，即 a^2-a+1 可以表示為 3 的指數之形式。由假設條件知 3 亦能整除 $a+1$，因此 3 亦能整除 $(a-2)$. 由此可知 3 能整除 a^2-a+1，但是 9 不可以整除 a^2-a+1. 因為 a^2-a+1 可以表示為 3 的指數之形式，所以必須滿足 $a^2-a+1=3$. 可是 $a>2$，所以 $a^2-a+1>3$；矛盾！故本引理成立。

(<u>柏盛峰</u>同學的解法)：

(a) $3\,\big|\,2^3+1$.

(b) 設 $3^i\,\big|\,2^{3^i}+1$. 由於 $2^{3^{i+1}}+1=(2^{3^i}+1)[(2^{3^i}+1)(2^{3^k}-2)+3]$，且 $3\,\big|\,(2^{3^i}+1)(2^{3^k}-2)+3$；

所以 $3^{i+1}\,\big|\,2^{3^{i+1}}+1$.

由(a), (b)及數學歸納法易知 $3^k\,\big|\,2^{3^k}+1$, $\forall\, k=1, 2, \cdots$.

令 $a_k=2^{3^k}+1$，s_k 為 a_k 質因數的個數。因為 $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}=a_k(2^{3^k}-2)+3$，所以

$$\gcd\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}, a_k\right)=3.$$

但是 $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}>3$；所以 $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ 有一個異於 a_k 所有質因數的因數；即 $s_{k+1}\ge s_k+1$，對於所有的正整數 k. 故存在一個 m 使得 $s_m\le 2000<s_{m+1}$. 取 a_{m+1} 不等於 3 的任意 1999 個質因數，令其乘積為 Q. 因為 a_{m+1} 為奇數，所以 2 不整除 Q. 由此可知 $3^{m+1}Q\,\big|\,a_{m+1}$，即 $3^{m+1}Q\,\big|\,2^{3^{m+1}}+1$. 由此又可得 $2^{3^{m+1}}\equiv -1 \pmod{3^{m+1}Q} \Rightarrow \left(2^{3^{m+1}}\right)^Q\equiv -1 \pmod{3^{m+1}Q}$.

所以 $3^{m+1}Q\,\big|\,2^{3^{m+1}Q}+1$，又 $3^{m+1}Q$ 恰可被 2000 個相異的質數整除。故 $3^{m+1}Q$ 即為所求。

【註】：僅證明出$3|n$，可得 1 分。寫明這樣的整數n存在可得 1 分。

【問題六】：設AH_1，BH_2，CH_3為銳角三角形ABC的三個高。三角形ABC的內切圓分別切三邊BC, CA, AB於T_1，T_2，T_3三點。並設直線l_1，l_2，l_3依序分別為直線H_2H_3，H_3H_1，H_1H_2關於對稱軸T_2T_3，T_3T_1，T_1T_2的對稱圖形。
證明 ： 由l_1，l_2，l_3所形成之三角形的三個頂點，落在三角形ABC的內切圓上。

【試題委員會公布的參考解答與給分標準】：
(解法一)：如圖所示，設M_1，M_2，M_3分別為T_1，T_2，T_3三點對應於$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$分角線的對稱點(reflections)，則顯然M_1，M_2，M_3會落在ΔABC的內切圓上。
我們將證明M_1，M_2，M_3即為由l_1，l_2，l_3所形成之三角形的三個頂點。
由對稱性，我們僅需證明直線l_1通過M_2點。設I為ΔABC內切圓的圓心。注意T_2與H_2落在BI的同側。在此我們僅證明C也落在與T_2，H_2相對於BI之同側之情形，致於C落在與T_2，H_2相對於 BI 之異側時，只需稍微修正即可。設$\angle A=2\alpha$，$\angle B=2\beta$，$\angle C=2\gamma$.

<u>引理</u>：H_2關於直線對稱軸T_2T_3的對稱點，落在直線BI上。
證明：過H_2做直線l垂直T_2T_3. 記BI與l的交點為P, BI與T_2T_3的交點為S, 則S同時落在線段T_2T_3及線段BP上。
現在我們僅證明$\angle PSH_2=2\angle PST_2$.
因為$\angle PST_2=\angle BST_3$，所以由三角形外角定理可知

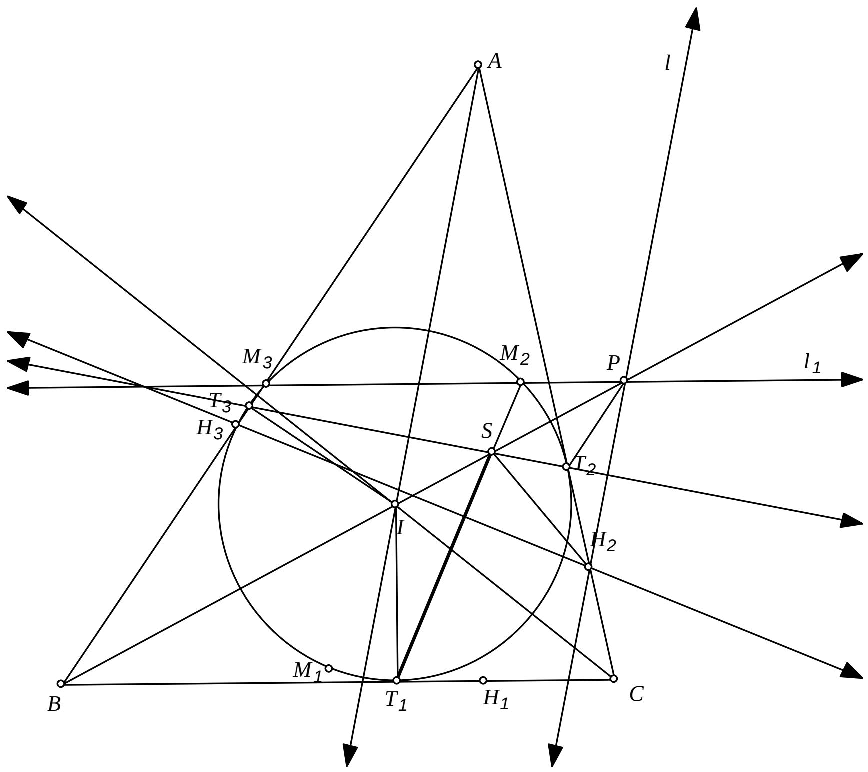
$$\angle BST_3=\angle AT_3S-\angle T_3BS=(90^\circ-\alpha)-\beta=\gamma.$$

因T_1與T_3對稱於直線BI, 所以$\angle BST_1=\angle BST_3=\gamma$.因為$\angle BT_1S=90^\circ+\alpha>90^\circ$, C與S落在IT_1的同側。由於$\angle IST_1=\angle ICT_1=\gamma$, 所以$S,I,T_1,C$四點共圓，因而$\angle ISC=\angle IT_1C=90^\circ$. 但因$\angle BH_2C=90^\circ$，$\angle ISC=90^\circ$，所以 B, C, H_2，S 四點共圓。故，$\angle PSH_2=\angle C=2\gamma=2\angle PST_2$.

(正確證明引理可得 4 分)

注意：於以上引理的證明過程中，因為直線l_1為直線H_2H_3對於直線T_2T_3的對稱圖形，且B, C, H_2, S四點共圓，我們實際已證明了$\angle BPT_2=\angle SH_2T_2=\beta$. 因為$M_2$為$T_2$對於$BI$的對稱點，$\angle BPM_2=\angle BPT_2=\beta=\angle CPB$, 因而$PM_2$平形於$BC$. 所以要證明$M_2$落在$l_1$上，僅需證明$l_1$平形於$BC$. 設$\beta\neq\gamma$; 並設直線$BC$與直線$H_2H_3$交於$D$點，與直線$T_2T_3$交於 E 點。注意：D, E 兩點是落在線段 BC 的同側。由簡單的計算易知$\angle BDH_3=2|\beta-\gamma|$, $\angle BET_3=|\beta-\gamma|$, 所以$l_1$平形於$BC$.

(僅證明$l_1 // BC$可得 2 分)



(解法二)︰首先證明出l_1平形於BC, 並看出可利用位似變換將ΔABC外接圓映至ΔABC內切圓。
(證明出$l_1 // BC$，且由$l_1 // BC$看出可利用位似變換將ΔABC外接圓映至ΔABC內切圓可得 3 分。)

設J為線段OI上的一點，使得$OJ : JI = R : r$, 其中R為ΔABC外接圓的半徑，r為ΔABC內切圓的半徑。考慮位似變換h, 以J為位似中心，以$-\dfrac{r}{R}$為位似比率；則h將ΔABC外接圓變換為ΔABC內切圓。此時位似變換 h 將ΔABC變換為一個在ΔABC內切圓上的$\Delta A'B'C'$，使得$\Delta A'B'C'$與ΔABC的對應邊平形。我們現在證明$\Delta A'B'C'$即為所求。為此我們證明$A'B'$為線段H_1H_2關於對稱軸T_1T_2的對稱圖形；同理，我們亦可得$B'C'$、$C'A'$分別為線段H_2H_3、H_3H_1關於對稱軸T_2T_3、T_3T_1對稱圖形。線段$A'B'$與線段H_1H_2為關於對稱軸T_1T_2的對稱圖形，若且唯若直線T_1T_2為以直線$A'B'$與直線H_1H_2所形成之角的角平分線。候者又等價於T_1距離直線$A'B'$與直線H_1H_2相等，且T_2距離直線$A'B'$與直線H_1H_2也相等。設$\angle A = 2\alpha$，$\angle B = 2\beta$，$\angle C = 2\gamma$. 由h的定義可知平行線 AB 與 $A'B'$ 的距離為 $r(1+\cos 2\gamma)$. T_1 至直線 AB 的距離為 $BT_1 \cdot \sin 2\beta = r\cot\beta \sin 2\beta = r(1+\cos 2\beta)$. 所以$d(T_1, A'B') = \left| r(\cos 2\beta - \cos 2\beta \right|$. 由$T_1$作直線$T_1T$垂直$H_1H_2$，由直角三角形$T_1H_1T$可知$TT_1 = T_1H_1 \cdot \sin\angle T_1H_1T$. 因為ABH_1H_2四點共圓，所以$\angle T_1H_1T = \angle CAB = 2\alpha$. 因為

$$T_1H_1 = \left| CH_1 - CT_1 \right| = \left| AC\cos 2\gamma - r\cot\gamma \right|,$$

所以$d(T_1, H_1H_2) = \left| (AC\cos 2\gamma - r\cot\gamma)\sin 2\alpha \right|$. 因$AC = AT_2 + CT_2 = r(\cot\alpha + \cot\gamma)$, 我們有

$$
\begin{aligned}
(AC\cos 2\gamma - r\cot\gamma)\sin 2\alpha &= r\cos 2\gamma \sin 2\alpha(\cot\gamma + \cot\alpha) - r\cot\gamma\sin 2\alpha \\
&= r\sin 2\alpha\cot\alpha\cos 2\gamma - r\sin 2\alpha\cot\gamma(1-\cos 2\gamma) \\
&= r(1+\cos 2\alpha)\cos 2\gamma - r\sin 2\alpha\sin 2\gamma \\
&= r(\cos 2\gamma - \cos 2\beta).
\end{aligned}
$$

綜合以上所論，我們可得

$$
d(T_1, H_1H_2) = d(T_1, A'B') = \begin{cases} r(\cos 2\beta - \cos 2\gamma), & \text{若 } \beta \le \gamma, \\ r(\cos 2\gamma - \cos 2\beta), & \text{若 } \gamma \le \beta. \end{cases}
$$

同理可得，

$$
d(T_2, H_1H_2) = d(T_2, A'B') = \begin{cases} r(\cos 2\alpha - \cos 2\gamma), & \text{若 } \alpha \le \gamma, \\ r(\cos 2\gamma - \cos 2\alpha), & \text{若 } \gamma \le \alpha. \end{cases}
$$

此證明了 T_1 距離直線 $A'B'$ 與直線 H_1H_2 相等，且 T_2 距離直線 $A'B'$ 與直線 H_1H_2 也相等。
(以實際算出上述之距離得到位似便換可將 ΔABC 外接圓映至 ΔABC 內切圓可得 4 分。)

【註】：以解析幾何的方法，正確算出 $l_i,\ i=1,2,3$ 的三個交點坐標可得 2 分。