第 40 屆 IMO 試題

Bucharest
Day I
July 16, 1999

1.試找出所有這樣的有限集合 S 至少包括平面上的 3 個點；對任何兩個 S 中不同的點 A, B ， AB 的垂直平分線是 S 的一個對稱軸。

2.設 $n \geq 2$ 是一個給定的整數，試找出最小的常數 C 使得對於所有非負實數 $x_1, \cdots, x_n \geq 0$ 如下不等式成立：

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x_i x_j \left(x_i^2 + x_j^2\right) \leq C\left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i\right)^4.$$

並判斷何時等號成立。

3.給定一個 $n \times n$ 的棋盤， n 是偶數。如果這個棋盤中的兩個不同的小方格有一個公共邊就說他們是相鄰的，但同一個方格不認為與它自身相鄰。試找出最小數目的方格，使得當它們被標記之後，棋盤上每一個方格都至少與一個標記過的方格相鄰。

第 40 屆 IMO 試題

Bucharest
Day II
July 17, 1999

4.試找出所有的正整數對(n, p)，使得 p 是質數，$n \le 2p$ 並且$(p-1)^n + 1$可被n^{p-1}整除。

5.圓G有兩個內切圓G_1, G_2，切點分別是M, N，G_1經過G_2的圓心。G_1, G_2的公共弦的延長線交G於A, B兩點。線MA, MB分別交G_1分別於C, D。求證：CD與G_2相切。

6.試找出所有的函數 $f : R \to R$ 使得 $f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$ 對所有$x, y \in R$都成立。 其中R表示實數集。