

# 第 39 屆 IMO 試題

Taipei, Taiwan

Day I

July 15, 1998

1. 凸四邊形  $ABCD$ ，對角線  $AC, BD$  互相垂直，對邊  $AB, DC$  不平行， $AB$  和  $DC$  的垂直平分線相交於  $P$  點， $P$  在  $ABCD$  的內部。求證  $ABCD$  是圓內接四邊形當且僅當三角形  $ABP$ 、 $CDP$  的面積相等。

2. 在一次競賽中有  $a$  個參賽者和  $b$  個裁判， $b \geq 3$  是一個奇數。每個裁判可以給參賽者判“合格”或者“不合格”，假設任何兩個裁判對至多  $k$  個參賽者的判決相同，求證： $\frac{k}{a} \geq \frac{(b-1)}{2b}$ 。

3. 對任何正整數  $n$ ，用  $d(n)$  表示  $n$  的正因數（包括  $1, n$ ）的個數。試求出所有正整數  $k$  使得存在  $n$  滿足  $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$ 。

# 第 39 屆 IMO 試題

Taipei, Taiwan

Day II

July 16, 1998

4. 試找出所有的正整數對  $(a, b)$  使得  $ab^2 + b + 7$  能整除  $a^2b + a + b$ 。
5. 設  $I$  是三角形  $ABC$  的內心，三角形  $ABC$  的內切圓在邊  $BC, CA, AB$  上的切點分別是  $K, L, M$ 。通過  $B$  點平行於  $MK$  的直線交  $LM, LK$  分別於  $R, S$ 。求證：三角形  $RIS$  是銳角三角形。
6. 考慮所有從正整數到正整數的函數  $f$  使之對於所有的  $s, t$  皆滿足  $f(f(s) + f(t)) = (f(s))^2$ 。試求出  $f(1998)$  的最小的可能值。