Version :China-Taipei(ROC)

第一天

1997 年 7 月 24 日

每題七分；作答時間共 4.5 小時

1. 在坐標平面上，具有整數坐標的點構成單位邊長的正方格的頂點。這些正方格被塗上黑白相間的兩種顏色（正如西洋棋盤一樣）。

   對於任意一對正整數 m 和 n，考慮一個直角三角形其頂點具有整數坐標，兩股長分別為 m 和 n，且其兩股都在這些正方格的邊上。

   設 S_1 為這個三角形區域中所有黑色部分的總面積，S_2 則為所有白色部分的總面積。令

$$f(m,n)=|S_1-S_2|$$

   a. 當 m 和 n 同為正偶數，或同為正奇數時，計算 $f(m,n)$的值。

   b. 證明：$f(m,n) \le \frac{1}{2}\max\{m,n\}$，對所有 m,n 都成立。

   c. 證明：對於每一個常數 C，存在 m,n，

   使得 $f(m,n) < C$ 不會成立。

2. 三角形 ABC 中，$\angle A$ 是最小的內角。兩點 B 和 C 將此三角形的外接圓分成兩個弧。設 U 為落在不含 A 點的弧上且異於 B 與 C 的一點。線段 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 的垂直平分線，分別交線段 $\overline{AU}$

於 V 與 W。直線 BV 與直線 CW 相交於 T。證明：$AU=TB+TC$。

3. 設 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 為滿足下列條件的實數：

$$|x_1+x_2+\ldots+x_n|=1$$

且

$$|x_i|\le \frac{n+1}{2}\ ;\ i=1,2,\ldots n。$$

證明：存在 $x_1, x_2,\ldots, x_n$ 的一個排列 $y_1,y_2,\ldots y_n$ 使得滿足

$$|y_1+2y_2+\ldots+ny_n|\le \frac{n+1}{2}.$$

第二天

1997 年 7 月 25 日

每題七分；作答時間共 4.5 小時

4. 一個 $n\times n$ 的矩陣（正方形陣列）稱為一個 n 階『銀矩陣』，如果它的元素取自集合 $S=\{1,2,\ldots.2n-1\}$ 且對於每一個 $i=1,2,\ldots,n$，它的第 i 列與第 i 行中的所有元素合起來恰好是 S 中的所有元素。

證明：(a)不存在 $n=1997$ 階的銀矩陣。

(b)有無限多個 n 的值，存在 n 階銀矩陣。

5.試求出滿足下列等式的所有正整數對 (a,b) $(a\geq 1,b\geq 1)$

$$a^{(b^2)}=b^a \text{。}$$

6. 對於每個正整數 n，將 n 表示成 2 的非負整數次方之和。令 $f(n)$為正整數 n 的上述不同表示法的個數。如果兩個表示法的差別僅在 於它們中各個數相加的次序不同，這兩個表示法就被視為是相同 的。例如，$f(4)=4$，因為 4 恰有下列四種表示法：

4；2+2；2+1+1；1+1+1+1。

證明：對於任意整數 $n\geq 3$，

$$2^{\frac{n^2}{4}}<f(2^n)<2^{\frac{n^2}{2}}.$$