第三十七屆國際數學奧林匹亞競試試題

第一天

1996 年 7 月 10 日

1. 設 $ABCD$ 為一長、寬分別是 $\overline{AB}=20,\overline{BC}=12$ 的長方形板。將此長方形分割為 20×12 個格子狀的單位小方格。設 r 為一個給定的正整數；一個銅幣在此板上每移動一次的規則如下：
   銅幣可從一個小方格內移動到另一個小方格內的充分且必要的條件是這兩個小方格的中心點之距離為 $\sqrt{r}$ 。
   我們的目標是要把一個位在含頂點 A 的小方格內之銅幣經若干次移動後到達含頂點 B 的小方格內。
   (a) 證明：當 r 是 2 的倍數或 3 的倍數時，此目標皆無法達成。
   (b) 證明：當 $r=73$ 時，此目標可以達成。
   (c) 當 $r=97$ 時，試問此目標是否可達成？

2. 設 P 為 ΔABC 內部的一點且 $\angle \mathrm{APB}-\angle \mathrm{ACB}=\angle \mathrm{APC}-\angle \mathrm{ABC}$。令 D 、 E 分別為 ΔAPB 與 ΔAPC 的內心。證明： AP, BD 與 CE 三線共點。

3. 設 $S=\{0,1,2,3,\cdots\}$ 為所有非負整數所成的集合。試找出所有由 S 對應到 S 本身且滿足下列條件的函數 f ：
   若 $m,n\in S$ 則 $f\left(m+f(n)\right)=f\left(f(m)\right)+f(n).$

第二天 1996 年 7 月 11 日

4. 考慮所有正整數 $a,\ b$ 使得 $15a+16b$ 及 $16a-15b$ 都是正整數的平方。試找出這些平方數的最小值。

5. 設 $ABCDEF$ 是凸六邊形且 AB 平行於 $ED,\ BC$ 平行於 $FE,\ CD$ 平行於 AF。令 R_A, R_C, R_E 依序表示 $\Delta FAB, \Delta BCD, \Delta DEF$ 的外接圓之半徑，且令 p 表示該六邊形的周長。證明：

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{P}{2}.$$

6. 設 $n,\ p,\ q$ 都是正整數且 $n > p+q$。令 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 都是整數且滿足下列的條件：

(a) $x_0 = x_n = 0$;

(b) 對每一整數 $i (1 \leq i \leq n)$,

或者有 $x_i - x_{i-1} = p$ 或者有 $x_i - x_{i-1} = -q$。

證明：存在一組標號 $(i,\ j), i < j$ 且 $(i,\ j) \neq (0,\ n)$ 使得 $x_i = x_j$。