第三十六屆國際數學奧林匹亞競試試題

第一天

1995 年 7 月 19 日

1. 設 A, B, C, D 為一直線上依序排列的四個不同點。分別以 AC, BD 為直徑的兩圓相交於 X 與 Y 。直線 XY 交 BC 於 Z 。設 P 為直線 XY 上異於 Z 之一點。直線 CP 與以 AC 為直徑的圓相交於 C 及 M；直線 BP 與以 BD 為直徑的圓相交於 B 及 N 。試證： AM, DN 及 XY 三線共點。

2. 設 a, b, c 為正實數且滿足 $abc = 1$ ，試證：

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

3. 試確定所有整數 $n > 3$ ，使得在平面上存在幾個點 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 並存在實數 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ ，滿足下列兩條件：

(i) $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 任意三點都不在同一直線上。

(ii) 對於每個三元組 i, j, k $(1 \leq i < j < k \leq n)$ ，三角形 $A_iA_jA_k$ 的面積等於 $r_i + r_j + r_k$ 。

第二天

1995 年 7 月 20 日

4. 設正實數的數列 $x_0, x_1, \cdots, x_{1995}$ 滿足下列兩條件：

(i) $x_0 = x_{1995}$ 。

(ii) $x_{i-1} + \dfrac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \dfrac{1}{x_i}$ ，其中 $i = 1, 2, \ldots, 1995$ 。

求所有滿足上述條件的數列中 x_0 的最大值。

5. 設 $ABCDEF$ 是凸六邊形，滿足 $AB = BC = CD,\ DE = EF = FA, \angle BCD = \angle EFA = 60°$。設 G 和 H 是這六邊形內部的兩點，使得 $\angle AGB = \angle DHE = 120°$ 。試證：

$$AG + GB + GH + DH + HE \geq CF.$$

6. 設 P 是一個奇質數。考慮集合 $\{1, 2, \cdots, 2P\}$ 滿足以下兩條件的子集 A ：

(i) A 恰有 P 個元素。

(ii) A 中所有元素之和可被 P 整除。

試求所有這樣的子集 A 的個數。