第三十五屆國際數學奧林匹亞競試試題
Version：Chinese
Chinese Taipei
Macau

第一天，1994 年 7 月 13 日

1. 設 m,n 為正整數， $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 為 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中的相異元素。如果

   $a_i + a_j \le n,\ 1 \le i \le j \le m$ ，就有某個 $k, 1 \le k \le m$ ，使得 $a_i + a_j = a_k$ 。試證：

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \ge \frac{n+1}{2}$$

2. 等腰三角形 ABC 中， $AB = AC$ 。並設
   (i) M 為線段 BC 的中點，O 為直線 AM 上的一點，且 OB 與 AB 互相垂直；
   (ii) Q 為線段 BC 上異於 B,C 的任一點；
   (iii) E 在直線 AB 上， F 在直線 AC 上，且 E,Q,F 為共線的相異三點。
   試證： OQ 與 EF 互相垂直的充要條件為 $QE = QF$ 。

3. 對於任意正整數 k, $f(k)$ 表示集合 $\{k+1, k+2, \cdots, 2k\}$ 內的每一個元素用二進位表示後恰有 3 個 1 的元素之個數。

   (a) 試證明對於每一正整數 m ，至少存在一個正整數 k ，使得 $f(k) = m$ 。

   (b) 試確定所有正整數 m ：對這樣的 m 恰有一個 k 使得 $f(k) = m$ 。

第二天，1994 年 7 月 14 日

4. 試求出所有有序正整數對 (m,n) 使得 $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ 是一個整數。

5. 設 S 為所有大於 -1 的實數所成的集合，試求出所有滿足下列兩個條件的函數 $f\colon S\to S$。

   (i) $f\left(x+f\left(y\right)+xf\left(y\right)\right)=y+f\left(x\right)+yf(x)$ 對 S 中所有 x 與 y 都成立；

   (ii) $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $-1<x<0$ 與 $0<x$ 兩區間上都是嚴格遞增。

6. 試證存在一個滿足下列性質的正整數集合 A：對任意由無限多個質數所形成的集合 S，存在 $k\geq 2$ 與兩個正整數 $m\in A$ 及 $n\notin A$，m 和 n 都是 S 中 k 個相異元素的乘積。