第三十四屆國際數學奧林匹亞競試試題

Version：Chinese ROC

第一天，1993 年 7 月 18 日

1. 設 $f\left(x\right)=x^{n}+5x^{n-1}+3$，其中 n 為大於 1 的整數。證明 $f\left(x\right)$ 不能表示成兩個整數係數多項式的乘積，其中每一多項式的次數至少是 1 次。

2. 設 D 為銳角三角形 ABC 內部的一點且滿足：
   $\angle ADB=90^{\circ}+\angle ACB$ 和 $\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AD}\cdot\overline{BC}$
   (a) 計算 $\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}$ 的比值。
   (b) 證明三角形 ACD 的外接圓與三角形 BCD 的外接圓在 C 點的切線互相垂直。

3. 在一個無界限的棋盤上，採用如下的規則玩棋：開始時，n^{2} 個棋子排在相連的 $n\times n$ 個小方格所形成的方塊上，每一棋子一個小方格，在這個遊戲中，每次移動跨越一小格，將一個棋子橫向或直向跨越相鄰且放有棋子的一個小方格，而進入下一個小方格，但這個方格必須是沒有棋子；否則不被允許。而被跨的棋子將隨即被拿掉。
   求出所有的 n 值，依這樣的規則玩棋，到最後會僅剩下一個棋子在棋盤上。

Version：Chinese ROC
第二天，1993 年 7 月 19 日

4. 在平面上的三點 P、Q、R，我們定義 $m(PQR)$ 為三角形 PQR 三個高之中最短的長度（當 P、Q、R 共線時規定 $m(PQR)=0$）。
設 A、B、C 為平面上的點，X 為這平面上的任意點，
證明 $m(ABC) \le m(ABX)+m(AXC)+m(XBC)$。

5. 設 $N=\{1,2,3,\cdots\cdots\}$。
試確定是否可找到一個函數 $f: N \to N$ 使得
$f(1)=2$，
且每個 $n \in N$，都有
$$f(f(n)) = f(n)+n$$
和 $f(n) < f(n+1)$。

6. 設 n 為大於 1 的整數，將 n 個燈 $L_0, L_1, \cdots, L_{n-1}$ 依序排在圓上，每個燈僅有“開”與“關”兩種狀態，現將執行一系列的步驟 $S_0, S_1, \cdots, S_i, \cdots$。
步驟 S_i 依下列條件影響 L_i 的狀態（其他的所有燈的狀態保持不變）：
若 L_{i-1} 是“開”的狀態，步驟 S_i 會將 L_i 的狀態由“開”變為“關”或由“關”變為“開”。
若 L_{i-1} 是“關”的狀態，步驟 S_i 會保持 L_i 的狀態不變。上述燈的編號乃依 $\bmod\ n$ 同餘看待，即 $L_{-1}=L_{n-1}$，$L_0=L_n$，$L_1=L_{n+1}, \cdots\cdots$。
設開始時全部的燈都是“開”的，試證：

(a) 可找到正整數 $M(n)$ 使得在執行第 $M(n)$ 個步驟後，所有的燈會再是全開”的。
(b) 若 n 是 2^k 型的數，則在執行第 n^2-1 個步驟後，所有的燈會再是全“開”的。
(c) 若 n 是 2^k+1 型的數，則在執行第 n^2-n+1 個步驟後，所有的燈會再是全“開”的。