第三十三屆國際數學奧林匹亞競試試題

Version：Chinese ROC

第一天，1992 年 7 月 15 日

1. 試求出所有的整數 a,b,c 使得 $1<a<b<c$ 且 $(a-1)(b-1)(c-1)$ 是 $abc-1$ 的因數。

2. 設 R 是全體實數的集合。試求出所有的函數 $f\colon R\to R$ 使得對一切 R 中的 x,y ，下式恆成立

$$f\left(x^2+f\left(y\right)\right)=y+(f\left(x\right))^2$$

3. 給定空間中的 9 個點，其中任意 4 點都不在同一平面上。在每兩點之間連上一條線段，其中有的線段著上藍色，有的線段著上紅色，有的不著色。試求出最小的 n 值，使得對任意 n 條線段每段或著上藍色或著上紅色時，必定會有一個三邊為同色的三角形。

台北

第二天，1992 年 7 月 16 日

4. 在一平面上，C 為一圓，L 為圓 C 的切線，M 為 L 上的一點。試求出滿足下列性質的點 P 的軌跡：

   在 L 上存在兩點 Q,R 使得 M 為線段 QR 的中點，且 C 為三角形 PQR 的內切圓。

5. 設 S 是空間直角坐標系中有限個點形成的集合，並設 S_x,S_y,S_z 分別表示 S 中的點在 yz —平面，zx —平面，xy —平面上的正射影之集合。證明：

$$|S|^2 \le |S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z|$$

   其中 $|A|$ 表示有限集合 A 的元素個數。

   （注：一點在一平面上的正射影是指此點到該平面所作垂線的垂足）

6. 對每個正整數 n，$S_{(n)}$ 定義為滿足下列條件的最大整數：對一切正整數 $k \le S_{(n)}$，n^2 都可表示成 k 個正整數的平方之和。

   (a) 證明：對每一個 $n \ge 4$，$S_{(n)} \le n^2 - 14$；

   (b) 試找出一個整數 n，使得 $S_{(n)} = n^2 - 14$；

   (c) 證明有無限多個整數 n 使得 $S_{(n)} = n^2 - 14$。